ЭКЗАМЕН ПО ТОПОЛОГИИ, 1 СЕМЕСТР (12–19 СЕНТЯБРЯ 2001 Г.)

Пожалуйста, соблюдайте следующие правила оформления работы:

1. *Работа должна иметь титульный лист, на котором написана фамилия, имя и отчество сдающего экзамен* **И БОЛЕЕ НИЧЕГО НЕ НАПИСАНО**
2. *Решение каждой задачи или пункта, в котором требуется ответ, должно начинаться со слова "Ответ", за которым следует ответ. Это правило нужно соблюдать, даже если в тексте решения ответ и так встречается.*

Работы нужно сдать в учебную часть до 20.00 в среду, 19 сентября.

Задача 1. Докажите, что всякое непрерывное отображение а) $S^2 \to S^1$ б) $\mathbb{R}P^2 \to S^1$ гомотопно отображению, образ которого — точка.

Задача 2. Докажите, что не существует непрерывного отображения ленты Мебиуса на свою границу, отображающего каждую точку границы в себя.

Задача 3. Сколько существует различных классов изоморфизма накрытий степени 6 над двумерным тором $\mathbb{T}^2$? Для каждого класса приведите конкретный пример накрытия из этого класса.

Задача 4. Шарнирный механизм состоит из трех соединенных шарнирами стержней AB, BC и CD, длины которых равны a, b и b соответственно. Точки A и D закреплены на расстоянии 1 друг от друга, а точки B и C могут двигаться по плоскости настолько, насколько позволяют шарниры. При каких значениях a и b множество положений шарнирного механизма не допускает структуры гладкого многообразия ? Чему равна в этом случае фундаментальная группа этого множества ?

Задача 5. Пространство $\mathbb{R}^5$ вложено в пространство $\mathbb{C}^3 = \mathbb{R}^6$ как линейное подпространство троек (z_1, z_2, z_3) таких, что $\operatorname{Im} z_3 = 0$. а) Докажите, что для каждой прямой ℓ, проходящей через начало координат, существует единственная комплексная прямая (одномерное комплексное подпространство пространства $\mathbb{C}^3$) $A_\ell \supset \ell$. б) Соответствие $\ell \mapsto A_\ell$ определяет отображение $A : \mathbb{R}P^4 \to \mathbb{C}P^2$. Вычислите его степень по модулю 2.

Задача 6. Пространство A состоит из пар (a, Π), где $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ — двумерная плоскость, проходящая через начало координат, а $a \in \Pi$ — точка. Докажите, что отображение $(a, \Pi) \mapsto \Pi$ определяет локально тривиальное расслоение. Имеет ли это расслоение сечение ? Тривиально ли это расслоение ?