**Тончайшим, славящимся во всем мире математикам.**

*Как мы достоверно знаем, едва ли существует что-либо иное, что могло бы в большей степени побудить благородные умы к совершению дел, ведущих к умножению знаний, чем предложение трудных, но в то же время полезных вопросов; их разрешением, с помощью того или иного метода, они достигнут славы для своего имени и воздвигнут себе вечный памятник у потомков. Я полагаю, что для меня не будет ничего более приятного, чем, если я, подражая примеру таких мужей, как Мерсенн, Паскаль, Ферма, Вивиани, предложу превосходнейшим аналитикам нашего века некоторую задачу. Пусть всякий, кто может, берет себе ту премию, которую мы заготовили для решившего задачу, - конечно, не суммы золота или серебра, приводящие в движение только низкие наемные умы, от которых мы вообще не ожидаем ничего похвального и ничего полезного для наук. Так как добродетель сама для себя представляет наилучшую награду, а слава содержит в себе неизмеримое побуждение, то мы и предлагаем премию, которая подходит мужу благородной крови, - премию, сплетенную из чести, похвалы и рукоплесканий; мы будем и публично, и устно увенчивать и украшать и восхвалять проницательность нашего великого Аполлона.*

**Иоганн Бернулли.** Программа, изданная в Гронингене в 1697 г.

# 1. Задачи, часть 1.

1. Выпрямить поле (указать явный вид соответствующего диффеоморфизма) в окрестности заданной фиксированной точки $(a_1, a_2)$. Сделать чертеж. Найти первый интеграл системы. Нарисовать линии уровня первого интеграла:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2 &= -6x_1 - 5x_2 \end{cases}$$

2. Найти “общее решение” уравнения, приведя его к каноническому виду. Изучить возможные постановки задачи Коши:

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0$$

3. Исследовать корректность постановки задачи Коши для системы уравнений с частными производными:

$$\begin{cases} u_t + u_x + 3v_x &= 0 \\ v_t - 6u_x - 5v_x &= 0 \end{cases}$$

4. Найти “общее решение” системы уравнений с частными производными, изучить возможные постановки задачи Коши:

$$\begin{cases} u_t - 2u_x + 3v_x &= 0 \\ v_t + 4u_x + 2v_x &= 0 \end{cases}$$

5. Найти “общее решение” заданного уравнения с частными производными. Нарисовать семейство линий уровня решения.

$$(6x + y)(\frac{\partial z}{\partial x}) + (-x + 6y)(\frac{\partial z}{\partial y}) = 0$$

6. Решить задачу Коши для уравнения:

$$xu_x + yu_y + xyu_z = 0; \qquad u = x^2 + y^2,\ z = 0$$

7. Решить задачу Коши для уравнения:

$$z_x + \frac{1}{2}z_y^2 = 1; \qquad x = 0,\ z = \frac{1}{2}y^2.$$

8. Решить задачу Коши для уравнения:

$$z_x^2 + z_y^2 - 1 = 0; \qquad y = \frac{1}{2}x^2,\ z = 0.$$

В какой области внутри параболы на плоскости $(x, y)$ существует решение этой задачи?

9. Написать уравнение поверхности, проходящей через прямую $x + y = 1;\ t = 0$ и являющейся характеристической поверхностью для волнового уравнения $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$. Чему могут быть равны скорости движения фронтов плоских волн, двигающихся вдоль прямой $x = y$? А вдоль прямой $x = -y$?

10. Написать уравнение поверхности, проходящей через прямую $x + y = 1;\ t = 0$ и являющейся характеристической поверхностью для системы

$$\begin{cases} 2u_t + v_t + 8w_x &= 0 \\ u_t - w_y &= 0 \\ w_t + 4v_x + v_y &= 0 \end{cases}$$

С какими скоростями могут двигаться фронты плоских волн, распространяющихся вдоль прямой $x = -y$?

11. Найти "общее решение" системы

$$\begin{cases} (x-1)u_t - (x+1)v_t + u_x &= 0 \\ (x+1)u_t - (x-1)v_t - v_x &= 0 \end{cases}$$

12. Решить задачу Коши для системы

$$\begin{cases} 2u_t + (2t-1)u_x - (2t+1)v_x &= 0 \\ 2v_t - (2t+1)v_x + (2t-1)v_x &= 0 \end{cases}$$

$$u(0, x) = \sin(x),\ v(0, x) = \operatorname{arctg}(x),\ x \in (-\infty, +\infty).$$

Нарисовать область на плоскости $(x, t)$, в которой решение этой системы однозначно определяется начальными условиями, заданными на луче $t = 0,\ x \in [0, +\infty)$.

13. Дана система

$$\begin{cases} 5u_t + 3v_t + 16u_x + 8v_x + 6u_y + 2v_y &= 0 \\ 3u_t + 5v_t + 8u_x + 16v_x + 2u_y + 6v_y &= 0 \end{cases}$$

С какими скоростями могут двигаться плоские волны вдоль оси $x$? Постройте решение в виде плоских волн, двигающихся вдоль прямой $x = -y$. С какими скоростями они могут двигаться?

14. Для изучения распространения плоских волн в цементе, Бюргерсом была предложена следующая реологическая схема: $(N|H) - (N - H)$. Исходя из закона Ньютона

$$\rho u_{tt} + \xi u_t = \sigma_x$$

и этой реологической модели, напишите соответствующее уравнение распространения возмущений. К какому классу можно отнести это уравнение, в зависимости от параметров модели? Сколько нужно задавать начальных условий в задаче Коши при $t = 0$? Те же вопросы для реологической модели $N|(N - H)$, предложенной Джеффрисом для описания распространения возмущений в земной коре.

15. Решить уравнение Пфаффа

$$2xyzdx + x^2zdy + x^2ydz = 0$$

16. Предложите какую-нибудь идею обобщения понятия решения уравнения Пфаффа, включающую и неинтегрируемый случай (множество таких идей не пусто).

“- *Г-голубчики, - сказал Федор Симеонович озадаченно, разобравшись в почерках. - Это же п-проблема Бен Б-бецалеля. Калиостро же доказал, что она не имеет решения.*

*- Мы сами знаем, что она не имеет решения, - сказал Хунта, немедленно ощетиниваясь. - Мы хотим знать, как ее решать.*

*- К-как-то ты странно рассуждаешь, К-кристо. К-как же искать решение, к-когда его нет? Б-бессмыслица какая-то.*

*- Извини, Теодор, но это ты очень странно рассуждаешь. Бессмыслица - искать решение, если оно и так есть. Речь идет о том, как поступать с задачей, которая решения не имеет. Это глубоко принципиальный вопрос, который, как я вижу, тебе, как прикладнику, к сожалению, не доступен. По-видимому, я напрасно начал с тобой беседу на эту тему*”.

**А Стругацкий, Б. Стругацкий**. Понедельник начинается в субботу. Москва, изд. Детская литература, 1965.