6 октября 2002

Экзамен по алгебре.

1. а) Приведите пример конечной группы G, для которой групповая алгебра $\mathbb{R}[G]$ является алгеброй с делением.

б) Докажите, что других примеров нет.

2. Пусть $\mathbb{M} = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Рассмотрим неприводимый (левый) $\mathbb{M}$-модуль. Докажите, что его размерность равна n.

3. Если $\mathbb{A}$ — тело и $\mathbb{F}$ — подполе в $\mathbb{A}$, то $\mathbb{F}$ будет максимальным подполем тогда и только тогда, когда централизатор $C(\mathbb{F})$ поля $\mathbb{F}$ в $\mathbb{A}$ совпадает с $\mathbb{F}$. (Максимальное подполе — максимальное по включению поле $\mathbb{F} \subset \mathbb{A}$.)

4. Найдите максимальное подполе $\mathbb{F}$ в алгебре гамильтоновых кватернионов над полем $\mathbb{Q}$.

5. Пусть G_1 и G_2 — две абелевы группы одинакового порядка. Докажите, что их групповые алгебры $\mathbb{C}[G_1]$ и $\mathbb{C}[G_2]$ изоморфны.

6. Пусть A – вещественная кососимметрическая матрица. Докажите, что матрица $E+A$ – не выраждена, а матрица $(E-A)(E+A)^{-1}$ ортогональна.

7. Пусть A и B – вещественные неотрицательно определенные симметрические матрицы. Предположим, что $\det(A+iB)=0$. Докажите, что существует такой вещественный вектор x, что $Ax=0$ и $Bx=0$.

8. Существует ли в алгебре $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{C})$ подалгебра коразмерности 1? Коразмерности 2?

9. "Единичка" e (т.е. $e^2=e$) в алгебре $\mathbb{A}$ называется примитивной, если её нельзя представить в виде суммы $e = e_1 + e_2$, где $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$ и $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = 0$.

Пусть $\mathbb{A}$ — полупростая алгебра. Докажите, что $e\mathbb{A}e$ — алгебра с делением, тогда и только тогда, когда e — примитивная "единичка".