ЗАДАЧИ 14 февраля 2002.

<u>*обозначения*</u>

(V,f) — симплектическое, ортогональное или унитарное пространство над полем $\mathbb{F}$.
$\mathrm{O}\,(V,f)$ — группа изометрий, $\Delta\,(V,f)$ — группа подобий.
$V^* = V - \{0\}$, $\quad\oplus$ — ортогональная прямая сумма.
Пусть $\mathrm{T} = \{t_1,..,t_m\}$ — семейство векторов в пространстве (V,f). Матрицей Грама $G\,(\mathrm{T},f)$ или просто $G\,(\mathrm{T})$ семейства T называется квадратная матрица $\big(f(t_i,t_j)\big)$.

1. Если T — базис V, то матрица Грама однозначно определяет форму f.

2. Если S — другой базис V, и $s_i = \sum_j a_{ij}t_j$, $a_{ij} \in \mathbb{F}$. Положим $\mathrm{A} = (a_{ij})$, $\mathrm{A}^\Theta = \big(a_{ij}^\Theta\big)$. Тогда $G\,(S) = \mathrm{A}G\,(T)\,(\mathrm{A}^t)^\Theta$.

3. Форма g на V тогда и только тогда подобна форме f, когда существует такой базис S в V, что $G\,(S,g) = \lambda G\,(T,f)$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{F}^*$ (если $\lambda = 1$, то речь идет об эквивалентности).

4. Пусть $L \in GL\,(V)$ — линейное преобразование пространства V, $L = (l_{ij})$ $(Lt_i = \sum_j l_{ij}t_j)$ его матрица в базисе T. Тогда $L \in \Delta\,(V,f)$ $\big($соотв. $\mathrm{O}(V,f)\big) \Leftrightarrow \lambda G\,(\mathrm{T}) = LG\,(\mathrm{T})\,(L^t)^\Theta$, $\lambda \in \mathbb{F}^*$ $\big(L \in \mathrm{O}(V,f)$ при $\lambda = 1\big)$.

5. Если (V,f) не является симплектическим, то оно содержит неизотропный вектор.

6. Если (V,f) унитарно, то $f(x,x) \in Fix\,\Theta$ (= подполе неподвижных элементов инволюции Θ).

7. Доказать, что фактор-пространство $V/Rad\,V$ несет форму того же типа, что и V. Доказать его невырожденность относительно этой формы.

8. Доказать, что гиперболическое пространство (= ортогональная прямая сумма гиперболических плоскостей) невырожденно. (Доказать общее утверждение о том, что $Rad\,V = Rad\,U_1 \oplus \ldots \oplus Rad\,U_k$, если $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$).

9. Пусть U — максимальное гиперболическое подпространство. Доказать, что тогда $V = U \oplus U^\perp$, и $\big(U^\perp\big)^*$ не содержит изотропных векторов.

10. Доказать, что все симплектические пространства являются гиперболическими. В частности размерность такого пространства четна и все симплектические пространства одинаковой размерности эквивалентны.

11. Пусть U изотропное пространство в V размерности m. Доказать, что оно содержится в гиперболическом пространстве размерности $2m$ и индекса Витта m.

12. Пусть (V,f) — симплектическое пространство, и $dim V = 2$.
Доказать, что $\mathrm{O}\,(V,f)\,(= Sp\,(V)) = SL\,(V)$.

13. Пусть (V,f) — унитарное гиперболическое пространство. Тогда $SL\,(V) \cap \mathrm{O}\,(V,f) \cong SL_2\,(Fix\,\Theta)$.

14*. Пусть $|\mathbb{F}| = q^2 < \infty$, и (V,f) — трехмерное унитарное пространство над $\mathbb{F}$. Тогда в V существует такой базис T, что $G\,(\mathrm{T}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

15. Доказать, что группа $\mathrm{O}\,(V,f)$ транзитивно действует на множестве
$$\{x \in V\,|f(x,x) = \lambda,\ \ \lambda \neq 0\}.$$

Лемма. Пусть f — невырожденная форма на V и $U \subset V$ — подпространство.
а. Если $e \notin U$, то $\exists t \in U^\perp$ т.ч. $(e,t) = 1$.
б. Если $e \notin U$ и $(e,e) = 0$, то $t \in U^\perp$ можно выбрать так, что бы $(t,t) = 0$.