21.02.02

Билинейные и квадратичные формы(функции).

Задача 1. Докажите, что размерности левого и правого ядер билинейной функции совпадают, однако, сами ядра могут и не совпадать.
Задача 2. Докажите, что всякая билинейная функция $f = f(x, y)$ ранга k может быть представлена в виде $p_1(x)q_1(y) + p_2(x)q_2(y) + \dots + p_k(x)q_k(y)$ для подходящих линейных функций $p_1, \dots, q_k$ на V.
Задача 3. Пусть f — невырожденная билинейная функция на линейном пространстве V. Докажите, что для любой линейной функции p найдется единственный вектор $v \in V$ такой, что $p(x) = f(x, v)$ для любого $x \in V$, и отображение $p \mapsto v$ является изоморфизмом пространств V и V^*.
Задача 4. Пусть f — билинейная функция на пространстве V и для любых $x, y \in V$ числа $f(x, y)$ и $f(y, x)$ одновременно либо равны либо не равны нулю. Докажите, что f либо симметрична либо кососимметрична.
Задача 5. Докажите, что любая билинейная функция однозначно представима в виде суммы симметрической и кососимметрической функций.
Задача 6. Докажите, что для любой положительно определенной симметрической билинейной функции f выполняется неравенство:

$$\sqrt{f(x+y, x+y)} \leqslant \sqrt{f(x,x)} + \sqrt{f(y,y)}.$$

Определение 1. Функция $g : V \to K$ называется квадратичной, если существует симметрическая билинейная функция f, такая, что $g(x) = f(x, x)$.
Задача 7. Пусть $\mathrm{char}\, K \neq 2$. Докажите, что f однозначно восстанавливается по g. Верно ли это, если $K = \mathbb{Z}_2$?
Задача 8. Пусть $f : V \to \mathbb{R}$ — вещественная квадратичная функция на вещественном векторном пространстве V. Докажите, что существует базис $e_1, \dots, e_n$ в котором эта функция имеет вид

$$f(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1^2 + \dots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \dots - x_{r+s}^2$$

($r+s \leqslant n$). Докажите, что числа r и s (положительный и отрицательный индексы инерции) однозначно определены.
Задача 9. Пусть $f_1, \dots, f_{k+s}$ — линейные функции и

$$q(x) = f_1^2(x) + \dots + f_r^2(x) - f_{r+1}^2(x) - \dots - f_{r+s}^2(x).$$

Докажите, что положительный индекс инерции функции $q(x)$ не превосходит r, а отрицательный индекс инерции не превосходит s.
Задача 10. Найдите положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной функции $q(X) = \mathrm{tr}\, X^2$ на пространстве $M_n(\mathbb{R})$.
Задача 11. Пусть f — невырожденная симметричная билинейная функция, имеющая отрицательный индекс инерции равный 1, и для некоторого вектора v $f(v, v) < 0$. Докажите, что ограничение f на любое подпространство, содержащее v, невырождено.