Задачи 7 марта 2002г.

Максимальное изотропное подпространство называется Лагранжевым. F — произвольное поле ($char\, F \neq 2$ для начинающих), $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ для осторожных.

1. Пусть (V, f) — ортогональная гиперболическая плоскость. Доказать, что группа $\mathrm{O}\,(V, f)$ изоморфна полупрямому произведению нормальной подгруппы F^* и подгруппы Z_2: $\mathrm{O}\,(V, f) = \mathrm{Z}_2 \triangleright F^*$.

2. Пусть (V, f) — анизотропная ортогональная плоскость. Доказать, что тогда существует такое квадратичное расширение Галуа K поля F, что:

а) пространство (V, f) подобно пространству $\left(\mathrm{K}, Norm_F^{\mathrm{K}}\right)$;

б) группа $\mathrm{O}\,(V, f) = \mathrm{Z}_2 \triangleright \mathrm{H}$, $\mathrm{H} = \left\{ a \in \mathrm{K} \,|\, aa^{\Theta} = 1 \right\}$, где $\langle \Theta \rangle = Gal\left({}^{\mathrm{K}}\!/_{F} \right)$.

3. $(F = \mathbb{C}, \mathbb{R})$ Доказать, что группа Sp_{2m} порождается трансвекциями $\big(t_u(v) = v + (v, u)u\big)$. Доказать, что $\det g = 1$ для любого $g \in Sp_{2m}$.

4. $(F = \mathbb{C})$ Доказать, что группа автоморфизмов эрмитовой формы $|\mathrm{Z}_1|^2 + \ldots + |\mathrm{Z}_n|^2$ порождается отражениями.

5. Базис симплектического пространства размерности $2m$, в котором матрица Грама имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{pmatrix}$ называется базисом Витта. Написать матрицу трансвекции в базисе Витта.

6. Пусть $\{t_1, \ldots, t_s\}$ и $\{w_1, \ldots, w_s\}$ два семейства векторов в пространстве (V, f). Для того, чтобы существовал такой элемент $g \in Aut\,(V, f)$, что $g\,(t_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, s$, необходимо и достаточно, чтобы $Gr\,\{t_1, \ldots, t_s\} = Gr\,\{w_1, \ldots, w_s\}$.

7. Вычислить порядок группы $\mathrm{O}_3\,(F_3)$.

8*. Пусть (V, f) — ортогональное пространство размерности $2n$ с индексом Витта n. На множестве его лагранжевых подпространств определим отношение $\mathrm{A} \sim \mathrm{B}$, если $\dim \left({}^{\mathrm{A}}\!/_{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} \right)$ — четное число.

Доказать, что:

а) $\sim$ отношение эквивалентности;

б) все лагранжевы подпространства разбиваются ровно на два класса эквивалентности.

9. Рассмотрим конечное расширение Галуа ${}^{\mathrm{K}}\!/_{\mathbb{Q}}$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и билинейную форму $f\,(x, y) = Tr_{{}^{\mathrm{K}}\!/_{\mathbb{Q}}}\,(xy)$ в векторном пространстве K над полем $\mathbb{Q}$. Найти сигнатуру квадратичной формы $F\,(x) = f\,(x, x)$, если $\mathrm{K} = \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$.

10. Эквивалентны ли квадратичные формы $3x^2 + 5y^2 + 7z^2$ и $x^2 + y^2 + 105z^2$ над полем рациональных чисел?

11. $(F = \mathbb{R})$ Пусть f положительно определенная билинейная симметрическая, а g — невырожденная кососимметрическая формы на V.
Тогда существует такое разложение $V = V_1 \oplus V_2$, что если $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$, $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in V_1$, $y_2 \in V_2$, то $g\,(x, y) = f\,(x_1, y_2) - f\,(x_2, y_1)$.