14.03.02

Собственные значения. Самосопряженность.

Задача 1. Для каждого подмножества $S \subset \mathbb{C}$ найти множество всех матриц 2×2 с комплексными коэффициентами, у которых спектр (множество собственных чисел) совпадает с S.

Задача 2. Для каждого подмножества $G \subset \mathbb{C}^2$ найти множество всех матриц 2×2 с комплексными коэффициентами, у которых множество собственных векторов совпадает с G.

Определение 1. Линейный оператор A в евклидовом или эрмитовом пространстве называется самосопряженным, если $(Ax, y) = (x, Ay)$ при любых двух векторах x и y.

Задача 3. Докажите, что оператор с матрицей A самосопряжен тогда и только тогда, когда $A = \bar{A}^t$.

Задача 4. Докажите, что самосопряженные операторы образуют линейное подпространство в пространстве всех операторов данного векторного пространства.

Задача 5. Докажите, что произведение двух самосопряженных операторов является самосопряженным оператором, тогда и только тогда, когда эти операторы перестановочны.

Задача 6. Найти условие на числа α и β при котором оператор $\alpha AB + \beta BA$ будет самосопряжен при любых самосопряженных A и B.

Задача 7. Пусть A — вещественная симметрическая матрица ($A = A^t$). Докажите, что характеристический многочлен этой матрицы имеет лишь вещественные корни.

Задача 8. Пусть A — самосопряженный оператор в эрмитовом пространстве. Докажите, что любое его собственное число — вещественно.

Задача 9. Пусть A — самосопряженный оператор в евклидовом или эрмитовом пространстве. Докажите, что любые два его собственные вектора, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны.

Задача 10. Пусть A — произвольный оператор в линейном пространстве. Докажите, что два вектора являются собственными с одинаковыми собственными числами, тогда и только тогда, когда любая их линейная комбинация (не равная нулю) является собственным вектором.

Задача 11. Пусть W — инвариантное подпространство самосопряженного оператора A в евклидовом или эрмитовом пространстве V ($A(W) \subset W$). Докажите, что $W^\perp$ — тоже инвариантно относительно A, и ограничения оператора A на W и $W^\perp$ являются самосопряженными операторами.

Задача 12. Пусть A — самосопряженный оператор в евклидовом или эрмитовом пространстве V.

1. Докажите, что в V есть базис, состоящий из собственных векторов оператора A.
2. Верно ли, что этот базис обязан быть ортогональным?
3. Докажите, что в V есть ортогональный базис, состоящий из собственных векторов оператора A.

Задача 13. Докажите, что самосопряженный оператор A в евклидовом или эрмитовом пространстве неотрицателен ($(v, Av) \geqslant 0$) тогда и только тогда, когда все его собственные значения неотрицательны и положителен ($(v, Av) > 0$ при $v \neq 0$) тогда и только тогда, когда все его собственные значения положительны. Докажите, что последнее равносильно тому, что все коэффициенты характеристического многочлена оператора A отличны от нуля и имеют чередующиеся знаки.

Задача 14. Пусть B — неотрицательный (положительный) самосопряженный оператор. Докажите, что существует такой неотрицательный (положительный) самосопряженный оператор A, что $A^{2002} = B$.