Жорданова нормальная форма оператора

4.04.2002

Соглашение. Всюду в этом листке V — конечномерное векторное пространство над полем K, $A : V \to V$ — линейный оператор, матрица которого также обозначается через A.

Определение 1. Многочлен $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ называется *характеристическим многочленом* матрицы A.

Задача 1. Найдите характеристические многочлены следующих матриц:

а) (*матрица Фробениуса*) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_1 \\ 1 & 0 & \dots & a_2 \\ 0 & 1 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$;

б) (*верхнетреугольная матрица*) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$;

в) матрицы нильпотентного оператора.

Задача 2. Докажите, что, с точностью до знака, коэффициенты характеристического многочлена $n \times n$-матрицы A совпадают с суммами главных миноров матрицы A. В частности, свободный член $P_A(\lambda)$ — это определитель матрицы A, а коэффициент при λ^{n-1} равен $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$.

Замечание. Так как определитель матрицы не зависит от выбора базиса, характеристический многочлен также от этого не зависит. Таким образом, можно говорить о *характеристическом многочлене линейного оператора*. Поэтому из задачи 2 следует, что суммы главных миноров матрицы (и, в частности, её след) также инвариантны относительно замены базиса.

Задача 3. Покажите, что следующие условия эквивалентны:

а) $\lambda \in k$ — собственное значение A;
б) $\lambda \in k$ — корень P_A.

Задача 4. Пусть поле K алгебраически замкнуто. Тогда каждый линейный оператор $A : V \to V$ имеет собственный вектор.

Определение 2. Если V — n-мерное векторное пространство и $P_A(\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{r} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, $\sum\limits_{i=1}^{r} n_i = n$, то оператор A называется *разложимым.*

Примечание: все операторы над алгебраически замкнутым полем разложимы.

Задача 5. Пусть $A : V \to V$ и $B : V \to V$ — коммутирующие ($AB = BA$) разложимые линейные операторы. Докажите, что у A и B есть общий собственный вектор.

Задача 6. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$ — собственные значения A, $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$ — набор чисел. Положим $V_i^{k_i} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i)^{k_i}$. Докажите, что векторные подпространства $V_i^{k_i}$ инвариантны относительно оператора A и линейно независимы, т.е. $V_1^{k_1} + \ldots + V_r^{k_r} = V_1^{k_1} \oplus \ldots \oplus V_r^{k_r}$.

Задача 7. Покажите, что если оператор A разложим, то найдётся такой набор чисел $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$, что $V = V_1^{k_1} \oplus \dots \oplus V_r^{k_r}$, причём $\dim V_i^{k_i}$ есть кратность корня λ_i в многочлене P_A.

Задача 8. Покажите, что $\{Q|Q \in K[x],\ Q(A) = 0\} = Q_A K[x]$, $Q_A \in K[x]$, старший коэффициент многочлена Q_A равен 1. Многочлен Q_A называется *минимальным многочленом* оператора A.

Задача 9. Найдите минимальный многочлен для

а) матрицы Фробениуса; б) нильпотентного оператора.

Задача 10. Покажите, что следующие условия эквивалентны:

а) $\lambda \in k$ — собственное значение A;

б) $\lambda \in k$ — корень Q_A.

Задача 11. Пусть $k_1, \dots, k_r$ — набор наименьших возможных чисел из задачи 6. Покажите, что k_i — кратность корня λ_i в многочлене Q_A $(1 \leq i \leq r)$.

Задача 12. Теорема Гамильтона-Кэли. Если оператор A разложим, то $P_A(A) = 0$, то есть P_A делится на Q_A.

Задача 13. Докажите теорему Гамильтона-Кэли для произвольного линейного оператора.

Задача 14. Приведите пример линейного оператора $A : V \to V$, для которого $Q_A \neq P_A$.

Задача 15. Докажите, что $P_A = Q_A$ тогда и только тогда, когда в некотором базисе матрица A является матрицей Фробениуса.

Задача 16. Покажите, что (для произвольного оператора A) существует $m \in \mathbb{N}$: Q_A^m делится на P_A.

Задача 17. Докажите, что если оператор A нильпотентен, то в некотором базисе его матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_m \end{pmatrix}, \quad \text{где } A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ —}$$

квадратные матрицы размера $l_i \times l_i$, последовательность (l_i) неубывает.

Задача 18. Покажите, что в условиях предыдущей задачи последовательность (l_i) не зависит от выбора специального базиса.

Задача 19. Жорданова нормальная форма оператора. Докажите, что если A — разложимый оператор, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ — собственные значения A, то в некотором базисе его матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{1m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_{21} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & A_{rm_r} \end{pmatrix}, \quad \text{где } A_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix} \text{ —}$$

квадратные матрицы, называемые *клетками*, размера $l_{ij} \times l_{ij}$, последовательность (l_{ij}) при фиксированном i неубывает, причём размеры клеток (последовательность (l_{ij})) не зависят от выбора специального базиса.