Тензорное произведение

11.04.2002

Пусть A — кольцо (с единицей).

Определение 1. Абелевая группа M называется (унитарным) A-модулем если для любого $a \in A$ и $m \in M$ определено произведение $a \cdot m \in M$ такое, что оно дистрибутивно по каждому сомножителю, ассоциативно ($(ab)m = a(bm)$) и, в случае унитарности, $1_A \cdot m = m$.
Задача 1. Пусть M — A-модуль и $X \subset M$ — произвольное подмножество этого модуля. Докажите, что наименьший A-подмодуль, содержащий множество X (= пересечение всех подмодулей содержащих X), совпадает с множеством конечных сумм $\sum a_i x_i$, $a_i \in A$, $x_i \in X$. (Модуль, *порожденный* множеством X).

Далее мы будем рассматривать лишь унитарные модули (соответственно, кольцо A будет с единицей).

Конструкция тензорного произведения модулей

Пусть даны два A-модуля M и N. Рассмотрим их (формальное) декартово произведение $M \times N$. Обозначим через C свободный A-модуль натянутый на $M \times N$. Элементы C — это отображения из $M \times N$ в A с конечным носителем ($\iff$ конечные формальные линейные комбинации элементов $M \times N$ с коэффициентами из A, т.е. выражения вида $\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i, y_i) \quad a_i \in A$, $x_i \in M$, $y_i \in N$).
Задача 2. Докажите, что C — унитарный A-модуль.

Пусть D — подмодуль в C, порожденный всеми элементами вида

$$(x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y)\,, \quad (x, y_1 + y_2) - (x, y_1) - (x, y_2)\,,$$
$$(ax, y) - a \cdot (x, y)\,, \quad (x, ay) - a \cdot (x, y)\,.$$

Положим $T = C/D$. Для каждого базисного элемента $(x, y) \in C$ обозначим через $x \otimes y$ его образ в T.
Задача 3. Докажите, что модуль T порожден элементами вида $x \otimes y$.
Задача 4. Докажите, что элементы $x \otimes y$ удовлетворяют соотношениям $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$, $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_1$, $a \cdot x \otimes y = (a \cdot x) \otimes y = x \otimes (a \cdot y)$.
Определение 2. Построенный модуль T называется *тензорным произведением* A-модулей M и N и обозначается $M \otimes_A N$ или просто $M \otimes N$, если ясно, какое кольцо A имеется в виду.

Задача 5.

1. Пусть M, N — некоторые A-модули. Тогда существует пара (T, g) состоящая из A-модуля T и A-билинейного отображения $g : M \times N \to T$ со следующим свойством:

Для любого A-модуля P и A-билинейного отображения $f : M \times N \to P$ существует единственное A-линейное отображение $f' : T \to P$ такое, что $f = f' \circ g$.

2. Если (T, g), (T', g') — две пары с таким свойством, то существует единственный изоморфизм $j : T \to T'$, для которого $j \circ g = g'$.

Задача 6. Рассмотрим подкольцо $2\mathbb{Z}$ в кольце $\mathbb{Z}$. Рассмотрим тензорные произведения $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} 2\mathbb{Z}$. Покажите, что элемент $1 \otimes 2 = 0$ в $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$, но отличен от нуля как элемент в $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} 2\mathbb{Z}$.
Задача 7. Докажите, что $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n = 0$, если m и n взаимно просты.

Задача 8. Чему равно при произвольных m и n:

1) $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n$?
2) $m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} n\mathbb{Z}$?
3) $m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n$?

Задача 9. Пусть A — некоторое кольцо, M — некоторый A-модуль. Докажите, существует изоморфизм $A \otimes_A M \to M$ при котором $a \otimes m \mapsto am$.

Задача 10. *Тензорное произведение отображений.* Пусть $H_i : M_i \to N_i$ — A-линейные отображения A-модулей $(i = 1, 2)$. Докажите, что существует единственное A-линейное отображение $H_1 \otimes H_2 : M_1 \otimes M_2 \to N_1 \otimes N_2$, которое переводит $m_1 \otimes m_2$ в $H_1(m_1) \otimes H_2(m_2)$.

Далее $A = \mathbb{F}$ — поле, соответственно, A-модули становятся векторными пространствами.

Задача 11. Пусть U и V — два $\mathbb{F}$-линейных пространства (не обязательно конечномерные). Пусть $X \subset U$, $Y \subset V$ — $\mathbb{F}$-базисы. Докажите, множество $\{x_i \otimes y_j\}$, где $x_i \in X$, $y_i \in Y$ образует $\mathbb{F}$-базис в тензорном произведении $U \otimes V$.

В следующих трех задачах, можно считать известным тот факт, что базис подпространства можно дополнить до базиса всего пространства.

Задача 12. Пусть U и V — два $\mathbb{F}$-линейных пространства. Докажите, что $u \otimes v = u' \otimes v' \neq 0$ тогда и только тогда, когда $v = \lambda v'$ и $u' = \lambda u$.

Задача 13. Пусть U и V — два $\mathbb{F}$-линейных пространства. Пусть $U_0 \subset U$ и $V_0 \subset V$ — подпространства. Докажите, что $U_0 \otimes V \cap U \otimes V_0 = U_0 \otimes V_0$.

Задача 14. Пусть U и V — два $\mathbb{F}$-линейных пространства. Пусть $U_0 \subset U$ и $V_0 \subset V$ — подпространства. Пусть $\pi_U : U \to U/U_0$, $\pi_V : V \to V/V_0$ — естественные проекции. Рассмотрим их тензорное произведение $\pi_U \otimes \pi_V : U \otimes V \to U/U_0 \otimes V/V_0$. Докажите, что $\ker(\pi_U \otimes \pi_V) = U_0 \otimes V + U \otimes V_0$.

Далее будем считать, что размерность конечна.

Задача 15. Обозначим через B матрицу отображения $B : V \to W$ $\mathbb{F}$-линейных пространств V, W в базисах $\{v_i\}$, $\{w_i\}$. Пусть C обозначает матрицу отображения $C : V' \to W'$ $\mathbb{F}$-линейных пространств V', W' в базисах $\{v_i'\}$, $\{w_i'\}$. Выразите матрицу отображения $B \otimes C$ в базисах $v_i \otimes v_j'$ и $w_i \otimes w_j'$ (*Кронекеровское произведение* матриц).

Задача 16. Пусть $H_1 : V^m \to V^m$ — линейный (разложимый) оператор в m-мерном $\mathbb{F}$-линейном пространстве V^m и $H_2 : V^n \to V^n$ — линейный (разложимый) оператор в n-мерном $\mathbb{F}$-линейном пространстве V^n. Пусть собственные значения H_1 и H_2 равны $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и $\beta_1, \dots, \beta_n$. Докажите, что

1) собственные значения оператора $H_1 \otimes H_2$ равны $\alpha_i \beta_j$;
2) собственные значения оператора $H_1 \otimes E_n + E_m \otimes H_2$ равны $\alpha_i + \beta_j$.

Задача 17. Докажите, что существует канонический изоморфизм $\alpha : V^* \otimes W \to \operatorname{Hom}(V, W)$, при котором $\alpha(f \otimes w) = \{v \mapsto f(v)w\}$.

Задача 18. Пусть V — $\mathbb{F}$-линейное пространство. Рассмотрим *отображение свертки* $\varepsilon : V^* \otimes V \to \mathbb{F}$, заданное формулой $\varepsilon(x^* \otimes y) = x^*(y)$ и продолженное по линейности. Докажите, что для любого линейного оператора A на V выполнено тождество $\operatorname{tr} A = \varepsilon\alpha^{-1}(A)$.