ЛЕКЦИЯ 10

Abstract. Два определения касательного расслоения к абстрактному многообразию.

Пусть M — гладкое m-мерное многообразие. Гладкое отображение $\gamma : \mathbb{R} \to M$ называется кривой. Говорят, что кривые γ_1 и γ_2 касаются в точке $a \in M$, если $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$, и $s^{-1}(\gamma_1(t)) - s^{-1}(\gamma_2(t)) = o(t)$ при $t \to 0$, где s — параметризация (а s^{-1} — координатное отображение) в окрестности точки a. Нетрудно видеть, что от координат это определение не зависит, и что отношение "касаться в точке a" является отношением эквивалентности.

Определение 1. Класс эквивалентности по этому отношению называется касательным вектором в точке a; множество таких векторов обозначается T_aM; объединение всех T_aM обозначим TM. a называется точкой приложения касательного вектора.

Теорема 1. *Множество TM обладает структурой гладкого ориентируемого многообразия размерности $2m$, карты на котором находятся во в заимно однозначном соответствии к картами на M.*

Доказательство. Пусть (U, V, s) — координаты на M. Определим $\widetilde{U} = \bigcup_{a\in U} T_aM$, $\widetilde{V} = V \times \mathbb{R}^m$, а отображение $\widetilde{s}$ сопоставляет паре $(r, w) \in V \times \mathbb{R}^m$ класс эквивалентности кривой $\gamma(t) = s(r + wt)$.

Отображение $\widetilde{s}$ взаимно однозначно, поскольку произвольная кривая γ такая, что $\gamma(0) = a$, принадлежит классу эквивалентности кривой $s(a + wt)$, где $w = \frac{d}{dt}s^{-1}(\gamma(t))\big|_{t=0}$. Если (U', V', s') — другая система координат на M, связанная с (U, V, s) отображением перехода τ, то отображение перехода между $(\widetilde{U}, \widetilde{V}, \widetilde{s})$ и $(\widetilde{U'}, \widetilde{V'}, \widetilde{s'})$ есть $\widetilde{\tau}(r, w) = (\tau(r), \tau'(r)w)$ — очевидно, гладкое. Производная такова: $\widetilde{\tau}'(r, w)(x, y) = (\tau'(r)x, \tau'(r)y + (\tau''(r)y, w))$; ее матрица содержит 2 одинаковых диагональных блока $n \times n$, равные $\tau'(r)$, и один наддиагональный блок. Поэтому $\det \widetilde{\tau}'(r, w) = (\det \tau'(r))^2 > 0$, и многообразие ориентируемо. □

Пусть $C^\infty(M)$ — алгебра гладких функций на M.

Определение 2. Касательным вектором к M в точке $a \in M$ называется пара (a, ν), где $\nu : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ — линейный функционал, обладающий свойством $\nu(fg) = f(a)\nu(g) + g(a)\nu(f)$ для произвольных функций $f, g \in C^\infty(M)$.

Четверка (B, E, W, p), где B, E — топологические пространства, W — векторное пространство, $p : E \to B$ — непрерывное отображение, называется векторным расслоением, если для каждой точки $b \in B$ существует такая ее окрестность U и такое взаимно однозначное отображение $F_U : p^{-1}(U) \to U \times W$, что

1. $\pi \circ F = p$, где $\pi : U \times W \to U$ — проекция на первый сомножитель.

Отсюда следует, что если две таких окрестности, U и V, пересекаются, то отображение перехода $R_{UV} \stackrel{\text{def}}{=} F_V \circ F_U^{-1} : (U \cap V) \times W \to (U \cap V) \times W$ имеет вид $R_{UV}(a, v) = (a, R(a, v))$.

2. Отображение $W \to W$, заданное формулой $v \mapsto R(a, v)$, линейно.

Пример 1 (тривиальное расслоение). Пусть $E = B \times W$, а $p : E \to B$ — проекция.

Теорема 2. *TM (в смысле определения 2) обладает структурой гладкого ориентируемого многообразия размерности $2m$. Это многообразие диффеоморфно многообразию TM в смысле определения 1. Отображение $TM \to M$, сопоставляющее касательному вектору его точку приложения, является гладким векторным расслоением со слоем $\mathbb{R}^m$.*

Доказательство. Пусть (U, V, s) — карта на многообразии M. Определим соответствующую карту на TM так: $\widetilde{U} = \bigcup_{a \in U} T_a M$, $\widetilde{V} = V \times \mathbb{R}^m$, а отображение $\widetilde{s}$ сопоставляет паре $(r, w) \in V \times \mathbb{R}^m$ функционал $\nu_{r,a}$, действующий по правилу $\nu_{r,w}(f) = (f \circ s)'(r)w$ (линейный функционал $(f \circ s)'(r) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ действует на вектор $w \in \mathbb{R}^m$).

Взаимная однозначность $\widetilde{s}$ (т.е. тот факт, что всякий функционал $\nu \in TM$ в подходящих координатах $(x_1, \dots, x_m)$ записывается как $\sum_{i=1}^m w_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(r)$) доказывается дословно так же, как теорема 4 лекции 6. Нетрудно видеть, что отображение перехода между координатами $(\widetilde{U}, \widetilde{V}, \widetilde{s})$ и $(\widetilde{U'}, \widetilde{V'}, \widetilde{s'})$ такое же, как в доказательстве теоремы 1. Поэтому многообразия диффеоморфны — диффеоморфизм можно определить покоординатно.

Касательное расслоение $TM \to M$ в координатах имеет вид $(r, w) \mapsto r$ и, очевидно, гладкое. Отображение F определим как обратное к отображению $\varphi : U \times \mathbb{R}^m \to p^{-1}(U) = \widetilde{U}$, действующему по правилу $\varphi(r, w) = \widetilde{s}(s^{-1}(r), w)$. □

Пусть $\gamma : \mathbb{R} \to M$ — кривая; $\gamma(0) = a$. Определим функционал $\nu : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ равенством $\nu(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\big|_{t=0}$.

Предложение 1. *Построенный функционал ν принадлежит пространству $T_a M$ и получается из кривой γ при диффеоморфизме теоремы 2.*

Доказательство. Пусть $s : V \to U$ — параметризация M в окрестности U точки a; для определенности пусть $s(0) = a$. Тогда кривая $\gamma(t)$ соответствует касательному вектору с координатами $(0, w)$, где $w = \frac{d}{dt} s^{-1}(\gamma(t))\big|_{t=0}$. С другой стороны, $\nu(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\big|_{t=0} = f'(a)\gamma'(0) = (f \circ s)'(0)(s^{-1} \circ \gamma)'(0) = \nu_{0,w}(f)$. □

Касательное пространство $T_a M$ обладает естественной структурой m-мерного векторного пространства. Нетрудно видеть, что для произвольного векторного расслоения (B, E, W, p) прообраз $p^{-1}(a) \subset E$ (называемый слоем расслоения над точкой a) также обладает структурой векторного пространства, изоморфного W.

Пример 2. Пусть $\ell^* \in \mathbb{R}P^n$, $\nu \in T_{\ell^*}\mathbb{R}P^n$. Выберем ненулевой вектор $w^* \in \ell^*$, $w^* = (w_0^*, \dots, w_n^*)$, и рассмотрим набор функций $x_0, \dots, x_n : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}$ таких, что $x_i(\ell^*) = w_i^*$ для всех $i = 0, \dots, n$, и чтобы для всех w из некоторой окрестности точки w^* числа $[x_0(w) : \dots : x_n(w)]$ представляли собой однородные координаты точки w. Определим вектор $A_\nu(w^*) \stackrel{\text{def}}{=} (\nu(x_0), \dots, \nu(x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Функции $x_0, \ldots, x_n$ определены с точностью до одновременного умножения на гладкую функцию $\lambda : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}$, такую что $\lambda(\ell^*) = 1$. Это приводит к неоднозначности в определении вектора $A_\nu(w^*)$: если $\widetilde{x}_i = x_i \cdot \lambda$, то $\widetilde{A_\nu}(w^*) = \lambda(\ell^*)(\nu(x_0), \ldots, \nu(x_n)) + \nu(\lambda)(x_0(w^*), \ldots, x_n(w^*)) = A_\nu(w^*) + \nu(\lambda)w^*$. Таким образом, определен линейный оператор $\overline{A}_\nu : \ell^* \to \mathbb{R}^{n+1}/\ell^*$, причем соответствие $\nu \mapsto \overline{A}_\nu$ тоже является линейным.

Обратно, пусть $\overline{A} : \ell^* \to \mathbb{R}^{n+1}/\ell^*$ — линейный оператор, $f : \mathbb{R}P^n\ to \mathbb{R}$ — гладкая функция, т.е. гладкая функция $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, обладающая свойством $f(\kappa x) = f(x)$, $\forall \kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\forall x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Пусть $A : \ell^* \to \mathbb{R}^{n+1}$ — линейный оператор, проектирующийся в $\overline{A}$. Положим по определению $\nu_{\overline{A}}(f) = \frac{d}{dt} f(w^* + tA(w^*))\big|_{t=0}$. От выбора A этот функционал не зависит: если $\widetilde{A}(w) = A(w) + \kappa w$, то $\widetilde{\nu_{\overline{A}}}(f) = \frac{d}{dt} f(w^* + tA(w^*) + t\kappa w^*)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(w^* + tA(w^*)/(1 + t\kappa))\big|_{t=0} = \nu_{\overline{A}}(f)$.

Нетрудно видеть, что соответствие $\overline{A} \mapsto \nu_{\overline{A}}$ — обратное к соответствию $\nu \mapsto \overline{A}_\nu$, определенному выше. Таким образом, пространство $T_{\ell^*}\mathbb{R}P^n$ изоморфно пространству линейных операторов $\ell^* \to \mathbb{R}^{n+1}/\ell^*$.