ЛЕКЦИЯ 11

ABSTRACT. Производная гладкого отображения. Векторные поля.

Пусть (B_1, E_1, W_1, p_1) и (B_2, E_2, W_2, p_2) — два векторных расслоения. Непрерывное отображение $f : E_1 \to E_2$ называется отображением расслоений, если

1. f послойное: если $p_1(u) = p_1(v)$, то $p_2 \circ f(u) = p_2 \circ f(v)$;
   Это свойство позволяет определить отображение $\widetilde{f} : B_1 \to B_2$ по правилу $\widetilde{f}(a) \stackrel{\text{def}}{=} p_2 \circ f(A)$, где $A \in E_1$ — произвольная точка, обладающая свойством $p_1(A) = a$. Тогда для каждого $a \in B_1$ отображение f задает отображение f_a слоя расслоения E_1 над точкой a в с лой расслоения E_2 над точкой $\widetilde{f}(a)$; также предполагается, что
2. отображение f_a для всякого $a \in B_1$ — линейное.

Пусть $F : M \to N$ — гладкое отображение, $a \in M$, $b = F(a)$, $\nu \in T_a M$. Определим функционал $\mu : C^\infty(N) \to \mathbb{R}$ формулой $\mu(f) \stackrel{\text{def}}{=} \nu(f \circ F)$.

Предложение 1. *$\mu \in T_b N$.*

Доказательство. $\mu(f \cdot g) = \nu((f \cdot g) \circ F) = \nu((f \circ F) \cdot (g \circ F)) = (f \circ F)(a)\nu(g \circ F) + (g \circ F)(a)\nu(f \circ F) = f(b)\mu(g) + g(b)\mu(f)$. □

Таким образом, определено линейное отображение $F'(a) : T_a M \to T_b N$. Отображение $F' : TM \to TN$, переводящее пару (a, v) (где $a \in M$, $v \in T_a M$) в пару $(F(a), F'(a)v)$ (очевидно, это отображение расслоений), называется производной отображения F.

Предложение 2.
1. *Пусть $F : M \to N$, $G : P \to M$ — гладкие отображения. Тогда $(F \circ G)' = F' \circ G'$.*
2. *Пусть $F : M \to N$ — гладкое отображение, обратимое в окрестности точки a и такое, что производная $F'(a)$ обратима; $F(a) = b$. Тогда $(F^{-1})'(b) = (F'(a))^{-1}$.*

Доказательство — прямая проверка.

Пусть теперь $F : M \to N$ — гладкое отображение. Сопоставим кривой $\gamma : \mathbb{R} \to M$ кривую $F \circ \gamma : \mathbb{R} \to N$.

Предложение 3. *Пусть $a \in M$, $b = F(a) \in N$. Тогда соответствие $\gamma \mapsto F \circ \gamma$ определяет линейное отображение $T_a M \to T_b N$, равное $F'(a)$.*

Доказательство. Кривой γ соответствует функционал $\nu(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\big|_{t=0}$, а кривой $F \circ \gamma$ — функционал $\mu(g) = \frac{d}{dt} g(F(\gamma(t)))\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(g \circ F)(\gamma(t))\big|_{t=0}$, откуда $\mu = F'(a)\nu$. □

Пусть теперь отображение F задается в координатах формулами $F(x_1, \dots, x_m) = (F_1(x_1, \dots, x_m), \dots, F_n(x_1, \dots, x_m))$; пусть, для удобства, $F(0) = 0$. Из теоремы 2 лекции 10 следует , что базис в пространстве $T_0 M$ составляют функционалы $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ (функционал $\frac{\partial}{\partial x_i}$ сопоставляет функции $\varphi \in C^\infty(M)$ число $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(0)$), а базис в пространстве T_0N — функционалы $\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}$. Действие $F'(0)$ на базисный элемент таково: $(F'(0)\frac{\partial}{\partial x_i})(\psi) = \frac{\partial \psi\circ F}{\partial x_i}(0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(0)\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(0)$; поэтому матрица отображения $F'(0) : T_0M \to T_0N$ в указанных базисах есть $\big(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(0)\big)$.

Следствие. *Если M и N — подмногообразия в линейных пространствах, то отображение $F'(a)$ совпадает с определенным ранее.*

Непрерывное отображение $X : B \to E$, обладающее свойством $p \circ X = \mathrm{id}$, называется сечением расслоения (B, E, W, p). Гладкое сечение касательного расслоения TM называется векторным полем на многообразии M.

Пусть A — алгебра. Линейное отображение $\delta : A \to A$ называется дифференцированием, если для любых двух элементов $x, y \in A$ выполнено равенство $\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y$ (тождество Лейбница). Нетрудно видеть, что если X — векторное поле на M, то формула $\delta(f)(a) = X(a)(f)$ определяет дифференцирование алгебры $C^\infty(M)$. Очевидно, верно и обратное: для всякого векторного поля эта формула определяет дифференцирование. Таким образом, множество векторных полей на M можно отождествить с множеством дифференцирований алгебры $C^\infty(M)$.

Предложение 4. *Пусть δ_1, δ_2 — два дифференцирования алгебры A. Тогда их коммутатор $[\delta_1, \delta_2] \stackrel{def}{=} \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1$ также является дифференцированием.*

Доказательство. Линейность очевидна. Тождество Лейбница: $[\delta_1, \delta_2](xy) = \delta_1(x\delta_2(y) + \delta_2(x)y) - \delta_2(x\delta_1(y) + \delta_1(x)y) = \delta_1(x)\delta_2(y) + x\delta_1\delta_2(y) + \delta_1\delta_2(x)y + \delta_2(x)\delta_1(y) - (\delta_2(x)\delta_1(y) + x\delta_2\delta_1(y) + \delta_2\delta_1(x)y + \ delta_1(x)\delta_2(y)) = x[\delta_1, \delta_2](y) + [\delta_1, \delta_2](x)y$. □

Свойства коммутатора дифференцирований:

1. Линейность: отображение $(\delta_1, \delta_2) \mapsto [\delta_1, \delta_2]$ линейно по каждому аргументу.
2. $[\delta_1, \delta_2] = -[\delta_2, \delta_1]$ (кососимметричность).
3. $[\delta_1, [\delta_2, \delta_3]] + [\delta_2, [\delta_3, \delta_1]] + [\delta_3, [\delta_1, \delta_2]]$ (тождество Якоби).

Все свойства доказываются прямой проверкой.

Для векторного поля X на многообразии M и функции $f \in C^\infty(M)$ определено векторное поле fX — с помощью поточечного умножения: $(fX)(\varphi) = fX(\varphi)$.

Предложение 5. $[fX_1, X_2] = f[X_1, X_2] - X_2(f)X_1$.

Доказательство. $[fX_1, X_2](\varphi) = fX_1X_2(\varphi) - X_2(fX_1(\varphi)) = fX_1X_2(\varphi) - fX_2X_1(\varphi) - X_2(f)X_1(\varphi)$. □

В координатах произвольное векторное поле задается формулой $A = \sum_{i=1}^m a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ (т.е. если $\varphi \in C^\infty(M)$, то $A(\varphi)(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^m a_i(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$). Прямое вычисление показывает, что коммутатор поля A с полем $B = \sum_{i=1}^m b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ задается формулой $[A, B] = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_j(x)\frac{\partial b_i}{\partial x_j}(x) - b_j(x)\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x)\right)\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Кривая γ называется интегральной кривой векторного поля A, если она в каждой своей точке $\gamma(t)$ представляет класс, равный вектору $A(\gamma(t))$. В координатах интегральная кривая $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$ векторного поля $A = \sum_{i=1}^m a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений $\gamma_i'(t) = a_i(\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t))$.