ВКМ НМУ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ, 2 СЕМЕСТР

ЛЕКЦИЯ 12

Abstract. Потоки. Геометрический смысл коммутатора векторных полей.

Определение. Пусть $T > 0$. *Потоком* на многообразии M называется семейство диффеоморфизмов $\{D_t, t \in [0,T]\}$, гладко зависящих от t и таких, что если $a, b, c \in [0,T]$ и $c = a+b$, то $D_c = D_a \circ D_b$ (полугрупповое свойство).

Из определения немедленно следует, что $D_0 = \mathrm{id}$, и что диффеоморфизмы D_t с различными t попарно коммутируют.

Группа диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}(M)$ многообразия M действует на алгебре $C^\infty(M)$ заменами переменных: $(D^*f)(a) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f(D(a))$. Очевидно, операторы D^* линейны и мультипликативны: $D^*(fg) = D^*fD^*g$.

Теорема 1. *Пусть D_t — поток на многообразии M. 1) Формула $X_D(f) = \frac{d}{dt}D_t^*f\big|_{t=0}$, где $f \in C^\infty(M)$, определяет векторное поле $X_D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$. 2) Для всякой точки $a \in M$ кривая $\gamma_a(t) = D_t(a)$ является интегральной кривой поля X_D. 3) Если $\{A_t\}$ и $\{B_t\}$ — два потока, и $X_A = X_B$, то потоки $\{A_t\}$ и $\{B_t\}$ совпадают для тех t, для которых оба определены. 4) Если многообразие M компактно, то для всякого векторного поля X существует поток $\{D_t\}$ такой, что $X = X_D$.*

Доказательство. 1) Линейность отображения $X_D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ очевидна. Тождество Лейбница: $X_D(fg) = \frac{d}{dt}D_t^*(fg)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}D_t^*fD_t^*g\big|_{t=0} = f \cdot X_D(g) + X_D(f)\cdot g$.

2) Для произвольной функции $f \in C^\infty(M)$ имеем $\gamma_a'(t)(f) = \frac{d}{d\tau}f(\gamma_a(\tau))\big|_{\tau=t} = \frac{d}{d\tau}f(D_\tau(a))\big|_{\tau=t} = \frac{d}{d\tau}f(D_\tau \circ D_t(a))\big|_{\tau=0} = (X_Df)(D_t(a)) = X_D(\gamma_a(t))(f)$.

3) Следует из п. 2) и теоремы единственности решения дифференциального уравнения.

4) Пусть M компактно, и X — векторное поле на M. По теореме существования и единственности решения дифференциального уравнения для каждой точки $p \in M$ существует такая окрестность U и такое число $T > 0$, что через каждую точку $q \in U$ проходит интегральная кривая $\gamma_q : [0,T] \to M$ поля X. Выберем из покрытия M такими окрестностями U конечное подпокрытие $U_1, \dots, U_n$, и пусть $T = \min T_1, \dots, T_n$ — теперь для каждой точки $p \in M$ существует интегральная кривая $\gamma_p : [0,T] \to M$ такая что $\gamma_p(0) = p$. Определим отображение D_t, где $t \in [0,T]$, равенством $D_t(p) = \gamma_p(t)$.

Докажем, что D_t — диффеоморфизм. Гладкость отображения следует из теоремы о гладкой зависимости решения дифференциального уравнения от начальных условий. Для построения обратного отображения определим семейство $\widetilde{D_t}$ той же конструкцией, что и D_t, но используя поле $-X$ вместо поля X — очевидно, $\widetilde{D_t} \circ D_t = \mathrm{id}$.

Полугрупповое свойство: пусть $c = a+b$. Тогда $D_c(p) = \gamma_p(c) = \gamma_p(a+b)$. Пусть $q = D_a(p) = \gamma_p(a)$. Кривая $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(a+t)$ является интегральной для поля X и обладает свойством $\widetilde{\gamma}(0) = q$. Следовательно, $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma_q(t)$, и $D_c(p) = \gamma_p(a+b) = \gamma_q(b) = D_a \circ D_b(p)$.

Проверим, что $X_D = X$. Действительно, $(X_D f)(a) = \frac{d}{dt} D_t^* f\big|_{t=0}(a) = \frac{d}{dt} f(\gamma_a(t))\big|_{t=0} = (Xf)(a)$ (в силу п. 2). $\square$

Отображение $\widetilde{D_t}$, фигурирующее в доказательстве, мы в дальнейшем будем обозначать D_{-t}.

Теорема 2. *Пусть поток A_t на многообразии M порождается векторным полем X, а поток B_t — векторным полем Y. Тогда имеет место формула* $\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}(A_t \circ B_s \circ A_{-t} \circ B_{-s})^*\Big|_{t=s=0} = [X, Y]$.

Первое доказательство. $\frac{d}{dt}(A_t \circ B_s \circ A_{-t} \circ B_{-s})^* f\big|_{t=0} = X\left((B_s \circ A_{-t} \circ B_{-s})^* f\right)\big|_{t=0} - (A_t \circ B_s)^* X\left(B_{-s}^* f\right)\big|_{t=0} = Xf - B_s^* X B_{-s}^* f$. Теперь, очевидно, $\frac{d}{ds}(Xf - B_s^* X B_{-s}^* f)\big|_{s=0} = (XY - YX)(f)$. $\square$

Второе доказательство. В силу локальности утверждения можно предполагать, что многообразие M — открытое подмножество в $\mathbb{R}^m$, и в нем заданы координаты $x_1, \ldots, x_m$.

Пусть $X = \sum_{i=1}^m a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum_{i=1}^m b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$. Тогда при $\tau \to 0$ имеем $A_\tau(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m) + \tau(a_1(x), \ldots, a_m(x)) + O(\tau^2)$, и аналогично для B_τ. Следовательно, $B_s \circ A_t \circ B_{-s} \circ A_{-t}(x_1, \ldots, x_m) = B_s \circ A_t \circ B_{-s}\big((x_1, \ldots, x_m) - t(a_1(x), \ldots, a_m(x)) + O(t^2)\big) = B_s \circ A_t\big((x_1, \ldots, x_m) - t(a_1(x), \ldots, a_m(x)) - s(b_1(x), \ldots, b_m(x)) + st(\sum_{i=1}^m \frac{\partial b_1}{\partial x_i}(x) a_i(x), \ldots, \sum_{i=1}^m \frac{\partial b_m}{\partial x_i}(x) a_i(x)) + O(t^2) + O(s^2)\big) = \ldots$
$= st\left((\sum_{i=1}^m \frac{\partial b_1}{\partial x_i}(x) a_i(x), \ldots, \sum_{i=1}^m \frac{\partial b_m}{\partial x_i}(x) a_i(x)) - (\sum_{i=1}^m \frac{\partial a_1}{\partial x_i}(x) b_i(x), \ldots, \sum_{i=1}^m \frac{\partial a_m}{\partial x_i}(x) b_i(x))\right) + O(t^2) + O(s^2)$. Утверждение теоремы следует теперь из формулы Тейлора и формулы для коммутатора векторных полей в координатах (лекция 11). $\square$

Пусть $Y : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ — векторное поле на многообразии M, а $D : M \to M$ — диффеоморфизм. Положим по определению $\mathrm{Ad}(D)Y = (D^{-1})^* Y D^* : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$. Если рассматривать векторное поле как отображение $Y : M \to TM$, то эта же формула выглядит так: $(\mathrm{Ad}(D)Y)(a) = D'(D^{-1}(a))Y(D^{-1}(a))$.

Теорема 3. *Пусть $\{D_t\}$ — поток на многообразии M, порожденный векторным полем X, и пусть Y — еще одно векторное поле. Тогда* $\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(D_t)Y\big|_{t=0} = [Y, X]$.

Первое доказательство. $\frac{d}{dt}(D_{-t}^*) Y D_t^*\big|_{t=0} = -XYD_t^*|_{t=0} + (D_{-t}^*)YX\big|_{t=0} = [Y, X]$. $\square$

Второе доказательство. Проводится вычислением в координатах — используем обозначения из второго доказательства теоремы 2. Имеем (всюду $t \to 0$): $D_t(x) = (x_1 + ta_1(x), \ldots, x_m + ta_m(x)) + o(t)$, откуда следует, что матрица отображения $D_t'(x)$ в базисе $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ равна $E + t(\frac{\partial a_j}{\partial x_i}) + o(t)$. Отсюда получаем: $(D_t^* Y)(x) = D_t'\left(\sum_{i=1}^m b_i(x_1 - ta_1(x), \ldots, x_m - ta_m(x)) \frac{\partial}{\partial x_i}\right) + o(t) = \sum_{i=1}^m b_i(x_1 - ta_1(x), \ldots, x_m - ta_m(x)) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^m b_i(x_1 - ta_1(x), \ldots, x_m - ta_m(x)) \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x - ta_1(x), \ldots, x_m - ta_m(x)) \frac{\partial}{\partial x_j} + o(t)$. Производная последнего выражения по t при $t = 0$ равна $\sum_{i,j=1}^m \left(b_i(x) \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x) - a_i(x) \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_i}$, т.е. $[Y, X]$. $\square$