ЛЕКЦИЯ 2

Abstract. Теорема о неявной функции. Теорема об обратной функции.

Лемма 1. *Множество Inv обратимых операторов $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ открыто в линейном пространстве $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ всех операторов. Отображение $M \mapsto M^{-1}$ множества Inv в себя непрерывно.*

Слово "открыто" относится здесь к топологии, порожденной в пространстве $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ произвольной нормой — по теореме об эквивалентности норм все эти топологии совпадают. В доказательстве мы будем использовать в качестве нормы в $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ норму оператора.

Доказательство. Докажем сначала, что единичный оператор I является внутренней точкой множества Inv. Пусть оператор A таков, что $\|A\| = a < 1$. Тогда $\|A^n\| \le a^n$, откуда следует, что ряд $I - A + A^2 - \dots + (-1)^n A^n + \dots$ абсолютно сходится (по норме) и, следовательно, сходится. Нетрудно видеть, что его сумма — оператор $(I + A)^{-1}$, откуда следует, что $I + A \in Inv$. Одновременно получается неравенство $\|(I + A)^{-1}\| \le 1/(1 - \|A\|)$, из которого следует непрерывность отображения $M \mapsto M^{-1}$ в точке I.

Пусть теперь $M \in Inv$ — произвольный обратимый оператор. Пусть $\|A\| < 1/\|M^{-1}\|$. Тогда $\|M^{-1}A\| \le \|M^{-1}\| \cdot \|A\| < 1$. Отсюда вытекает, что оператор $I + M^{-1}A$ обратим и, следовательно, обратим оператор $M + A = M(I + M^{-1}A)$. Непрерывность оператора обращения матрицы в точке M следует из равенства $(M + A)^{-1} = (I + M^{-1}A)^{-1}M^{-1}$, непрерывности в точке I и непрерывности операторов умножения справа и слева на фиксированную матрицу. □

Теорема 1 (об обратной функции)**.** *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — отображение, имеющее в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ непрерывную производную. Пусть производная $f'(x_0)$ — обратимый оператор. Тогда существуют окрестность U точки x_0 и окрестность V точки $f(x_0)$ такие, что f является взаимно однозначным отображением $U \to V$, и обратное отображение $f^{-1} : V \to U$ непрерывно дифференцируемо.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что в силу леммы 1 и непрерывной дифференцируемости отображения f оператор $f'(x)$ обратим при x, лежащем в достаточно малой окрестности U точки x_0. В дальнейшем мы будем еще уменьшать эту окрестность, обозначая результат всякий раз снова U. Обозначим $A = f'(x_0)$, и $c = \|A^{-1}\|$.

Покажем, что $f(x) \ne f(y)$, если $x \ne y$ — две точки окрестности U. Выберем в качестве U шар, настолько малый, чтобы при $x \in U$ выполнялось неравенство $\|f'(x) - A\| \le 1/2c$. Рассмотрим отображение $F(t) \stackrel{\text{def}}{=} f((1 - t)x + ty) - tA(y - x)$; здесь $t \in [0, 1]$, и все точки $(1 - t)x + ty$ лежат в U, поскольку U выпукла. Производная отображения $F : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ (по t) равна

$(f'((1-t)x+ty)-A)(y-x)$ и не превосходит по норме величины $\|y-x\|/2c \le \|A^{-1}A(y-x)\|/2c \le \|A(y-x)\|/2$. Тогда имеем: $\|f(y)-f(x)-A(y-x)\| = \|F(1)-F(0)\| = \left\|\int_0^1 F'(t)\,dt\right\| \le \int_0^1 \|F'(t)\|\,dt \le \|A(y-x)\|/2$. Из неравенства треугольника теперь вытекает, что $\|f(x)-f(y)\| \ge \|A(y-x)\|/2$. Поскольку оператор A обратим, получаем требуемое.

Покажем теперь, что образ $V \stackrel{\text{def}}{=} f(U)$ окрестности U открыт. Пусть $y_0 \in V$; без ограничения общности можно считать, что $y_0 = f(x_0)$. Рассмотрим замкнутый шар $B_r(x_0)$, целиком лежащий в U. Зафиксируем точку y, достаточно близкую к y_0 и покажем, что $y \in V$ (это и означает открытость). Для этого рассмотрим точку x такую, что функция $\varphi(x) = \|f(x)-y\|^2$ достигает в этой точке своего минимума на (компактном) множестве $B_r(x_0)$. Покажем, что x не может лежать на границе шара. Действительно, если $\|x-x_0\| = r$, то $\|f(x)-y_0\| \ge r/2c$. Таким образом, если $\|y-y_0\|$ достаточно мало — например, меньше $r/6c$ — то $\|y_0-y\| < \|f(x)-y\|$, вопреки минимальности.

Таким образом, x — внутренняя точка шара. Из этого следует, что производная функции φ в точке x равна нулю. Иными словами, $f'(x)(f(x)-y) = 0$. В силу обратимости оператора $f'(x)$ получаем $f(x) = y$ — таким образом, $y \in V$, и V открыто.

Непрерывная дифференцируемость обратного отображения f^{-1} следует из теоремы 4 предыдущей лекции и последнего утверждения леммы 1. □

Пусть $f : U \times V \to W$ — некоторое отображение; U, V, W — нормированные пространства. Символом $\frac{\partial f}{\partial u}(a,b)$, где $a \in U$, $b \in V$, обозначают производную в точке a отображения $f_b : U \to W$, заданного формулой $f_b(u) \stackrel{\text{def}}{=} f(u,b)$.

Теорема 2 (параметрическая теорема об обратной функции). *Пусть $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемое отображение, для которого $f(a,b) = c$, и оператор $\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ обратим. Тогда существует такая окрестность $U \subset \mathbb{R}^n$ точки c, окрестность $V \subset \mathbb{R}^m$ точки b и однозначно определенное непрерывно дифференцируемое отображение $g : U \times V \to \mathbb{R}^n$, для которого $g(c,b) = a$ и $f(g(p,q),q) \equiv p$.*

Следствие 1 (теорема о неявной функции). *Пусть $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — отображение из теоремы 2. Тогда существует такая окрестность $V \subset \mathbb{R}^m$ точки b и в ней однозначно определенное непрерывно дифференцируемое отображение $h : V \to \mathbb{R}^n$ такое, что $h(b) = a$ и $f(h(q),q) \equiv c$*

Доказательство. Рассмотрим отображение $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, заданное формулой $F(x,y) = (f(x,y),y)$. Производная $F'(x,y)$ равна $f'(x,y) \times \Pi_m$, где $\Pi_m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — проектор ($\Pi_m(u,v) = v$). Из условия теоремы следует, что $F'(a,b)$ — обратимый оператор. В силу теоремы 1 существует обратное отображение $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$; оно обязательно имеет вид $G(p,q) = (g(p,q),q)$ — тем самым доказана теорема. Для доказательства следствия положим $h(q) \stackrel{\text{def}}{=} g(c,q)$. □

Следствие 2. *Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемое отображение, и $\operatorname{Rk} f'(a) = m$ (следовательно, $m \le n$). Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — аффинное подпространство, проходящее через точку $b = f(a)$ и параллельное образу линейного оператора $f'(a)$, а $P : \mathbb{R}^n \to X$ — ортогональный проектор на X. Тогда существует окрестность U точки a такая, что множество*

$V \stackrel{def}{=} Pf(U) \subset X$ *открыто, и* $Pf : U \to V$ *— взаимно однозначное отображение. Пусть* $r \in f(U)$. *Тогда* $\|r - Pr\| = o(\|r - b\|)$ *при* $r \to b$.

Для доказательства достаточно заметить, что отображение $Pf : \mathbb{R}^m \to X$ удовлетворяет условиям теоремы об обратной функции. Последнее утверждение выводится так: пусть $r = f(a + h)$. Тогда элемент $v \stackrel{\text{def}}{=} f(a) + f'(a)h \in X$, и $\|v - r\| = o(\|h\|)$. Поскольку Pr — ближайшая к r точка подпространства X, то $\|r - Pr\| \leq \|v - r\|$.