ЛЕКЦИЯ 3

Abstract. Определение гладкого многообразия, гладкого отображения, касательного пространства и производной.

Подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется гладким m-мерным подмногообразием, если существует набор открытых подмножеств $U \subset \mathbb{R}^n$, покрывающих в совокупности M, и для каждого из этих подмножеств U существует открытое подмножество $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ и гладкое отображение $s_U : \widetilde{U} \to \mathbb{R}^n$ такое, что

1. $s_U(\widetilde{U}) = M \cap U$, и $s_U : \widetilde{U} \to M \cap U$ — гомеоморфизм.
2. $\operatorname{Rk} s'_U(x) = m$ для всякого $x \in \widetilde{U}$.

Таким образом, для каждой точки $a \in M \cap U$ однозначно определена точка $(x_1(a), \dots, x_m(a)) = s_U^{-1}(a)$. Множество U (или, иногда, $M \cap U$) называют картой, отображение s_U — параметризацией, отображение s_U^{-1} — системой координат, а числа $x_i(a)$ — координатами точки a на многообразии M.

Пусть $a \in M \cap U_1 \cap U_2$. Тогда для a имеются два набора координат, $s_{U_1}^{-1}(a)$ и $s_{U_2}^{-1}(a)$. Преобразование $s_{U_2} \circ s_{U_1}^{-1} : U_1 \to U_2$ (замена координат) является взаимно однозначным и гладким.

Пример 1. Окружность $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ — одномерное подмногообразие в $\mathbb{R}^2$. Например, можно взять $U_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$, $U_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,0)\}$, $\widetilde{U}_1 = \mathbb{R}^1$, $\widetilde{U}_2 = \mathbb{R}^1$, параметризации $s_{U_1}(t) = \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}\right)$ и $s_{U_2}(\tau) = \left(\frac{1-\tau^2}{\tau^2+1}, \frac{2\tau}{\tau^2+1}\right)$. Преобразование координат $\tau = 1/t$.

Пример 2. Спираль S, заданная в полярных координатах как $S = \{(e^t/(1+e^t), t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, является гладким одномерным подмногообразием в $\mathbb{R}^2$; здесь есть единственная карта $U = \mathbb{R}^2$, $V = \mathbb{R}^1$, $s_U(t) = (e^t/(1+e^t), t)$ (в полярных координатах). Объединение $\widetilde{S}$ спирали S и единичной окружности с центром в начале координат подмногообразием в $\mathbb{R}^2$ не является. Действительно, пересечение $\widetilde{S} \cap \Omega$, где Ω — маленький круг с центром в точке $(1,0)$, состоит из счетного числа компонент связности $a_0, a_1, \dots$, где a_0 — дуга окружности, а остальные компоненты принадлежат $S \cap \Omega$. Каждая точка компоненты a_0 является пределом последовательности точек, принадлежащих компонентам a_i, $i \neq 0$. Нетрудно видеть, что в $\mathbb{R}^1$ не существует открытого подмножества с таким свойством, т.е. гомеоморфного $\widetilde{S} \cap \Omega$.

Пример 3. Множество $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ не является одномерным подмногообразием в $\mathbb{R}^2$. Действительно, пересечение Q и маленького круга в $\mathbb{R}^2$, содержащего начало координат, является объединением двух пересекающихся интервалов. Нетрудно видеть (докажите !), что в $\mathbb{R}^1$ не существует открытого множества, гомеоморфного такому объединению.

Пример 4. Открытое подмножество m-мерного подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ само, очевидно, является m-мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^n$.

Предложение 1. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — непрерывно дифференцируемое отображение, такое что если $f(x) = a$, то $\mathrm{Rk}\, f'(x) = m$. Тогда множество $f^{-1}(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = a\}$ является гладким $(n-m)$-мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть $f(x_0) = a$. Матрица производной $f'(x_0)$ (в стандартных базисах в $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$) имеет невырожденный минор порядка m); столбцы, входящие в этот минор, определяют разложение $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, относительно которого отображение f удовлетворяет условиям параметрической теоремы об обратной функции. Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^{n-m}$ — соответствующие окрестности. Тогда $g(U \times V) \cap f^{-1}(a) = g(\{a\} \times V)$, т.е. $g(U \times V)$ — окрестность, упоминаемая в определении многообразия, $V = \widetilde{U}$, и $g = s_V$ — параметризация. □

Пример 5. Сфера $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ — n-мерное подмногообразие в $\mathbb{R}^{n+1}$. Действительно, пусть $f(x_0, \dots, x_n) = x_0^2 + \dots + x_n^2$; тогда $f'(x_0, \dots, x_n)(u_0, \dots, u_n) = 2\sum_{i=0}^n x_i u_i$. Если $f(x_0, \dots, x_n) = 1$, то среди чисел $x_0, \dots, x_n$ есть по крайней мере одно, не равное нулю, и ранг линейного отображения $f'(x_0, \dots, x_n) : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ равен 1. Очевидное обобщение: пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — такая функция, что f и все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ одновременно в нуль не обращаются. Тогда множество $f^{-1}(0)$ — гладкое многообразие размерности $n - 1$.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — гладкое m-мерное подмногообразие, $a \in M \cap U$, где U — карта; $x = s_U^{-1}(a)$ — координаты.

Определение 1. Линейное пространство $X \subset \mathbb{R}^n$, являющееся образом линейного оператора $s_U'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, называется касательным пространством к многообразию M в точке a и обозначается $T_a M$.

Определение 2. Линейное пространство $X \subset \mathbb{R}^n$ размерности m называется касательным пространством к многообразию M в точке a, если $\|P(b) - b\| = o(\|b - a\|)$ при $b \to a$, где $b \in M$, а P — ортогональный проектор на аффинное подпространство $X + a$.

Предложение 2. *Оба определения касательного пространства корректны и эквивалентны друг другу.*

Доказательство. Докажем корректность определения 1, т.е. что пространство X не зависит от выбора системы координат. Действительно, пусть V — другая карта, s_V — соответствующая параметризация, $s_V(y) = a$. Тогда $s_V'(y) = s_U'(x) \circ (s_U^{-1} \circ s_V)'(y)$. Отображение справа представляет собой невырожденный линейный оператор $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, и не влияет на образ.

Корректность определения 2, т.е. единственность подпространства X, очевидна. То, что касательное пространство в смысле определения 1 удовлетворяет определению 2, вытекает из следствия 2 предыдущей лекции. □

Пример 6. Квадрат $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \le 1\}$ не является гладким одномерным подмногообразием в $\mathbb{R}^2$. Действительно, в точке $(1, 0) \in Q$ не существует касательной прямой в смысле определения 2.

Лемма 1. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — гладкое подмногообразие размерности m, $a \in M$, $U \ni a$ — карта, $s_U : \widetilde{U} \to U$ — соответствующая параметризация.*

Тогда существует окрестность $V \subset U$ и гладкое отображение $\varrho_U : V \to \widetilde{U}$, такое, что $\mathrm{Rk}\, \varrho'_U(a) = m$ *и* $\varrho_U|_{M\cap U} = s_U^{-1}$.

Доказательство. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — пространство размерности $(n-m)$, трансверсальное к T_aM (т.е. такое, что $X + T_a = \mathbb{R}^n$, $X \cap T_aM = \{0\}$). Рассмотрим отображение $\mu : X \times V \to \mathbb{R}^n$, заданное формулой $\mu(x, v) = x + s_U(v)$. Нетрудно проверить, что μ удовлетворяет условиям теоремы об обратной функции; положим $\varrho_U = \pi \circ \mu^{-1}$, где $\pi : X \times \widetilde{U} \to \widetilde{U}$ — проекция. □

Отображение линейных пространств назовем *N-гладким* (где $N \geq 1$), если оно имеет непрерывные производные до порядка N включительно; *бесконечно гладким*, если оно имеет (непрерывные) производные всех порядков. Слово "гладкое отображение" (линейных пространств) означает, что отображение N-гладко для некоторого (неуказанного) N или бесконечно гладко.

Определение 3. Пусть $M_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ и $M_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ — гладкие подмногообразия размерностей m_1 и m_2, и $f : M_1 \to M_2$ — отображение, при котором $f(a) = b$. Пусть s_U — параметризация в окрестности точки a, а s_V — точки b. Отображение f называется гладким в точке a, если отображение $f_{UV} \stackrel{\mathrm{def}}{=} s_V^{-1} \circ f \circ s_U : \mathbb{R}^{m_1} \to \mathbb{R}^{m_2}$ — отображение, гладкое в точке $s_U^{-1}(a)$.

Очевидно, понятие гладкого отображения многообразий определено корректно, т.е. не зависит от выбора систем координат U и V. Отображение f_{UV} естественно называть "отображением f в координатах U, V".

Пример 7. Пусть $F : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$ — гладкое отображение, для которого $F(M_1) \subset M_2$. Тогда ограничение $f \stackrel{\mathrm{def}}{=} F|_{M_1} : M_1 \to M_2$ является гладким отображением многообразий. Действительно, f_{UV} является композиция гладких отображений $f_{UV} = \varrho_V \circ f \circ s_U^{-1}$, где ϱ_V — отображение из леммы 1. Можно показать, что всякое гладкое отображение многообразий получается таким образом.

Определение 4. Пусть $M_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ и $M_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ — гладкие подмногообразия размерностей m_1 и m_2, и $f : M_1 \to M_2$ — отображение, гладкое в точке a и такое, что $f(a) = b$. Пусть s_U — параметризация в окрестности точки a, а s_V — точки b. Линейное отображение $f'(a) : T_aM_1 \to T_bM_2$, заданное формулой $f'(a) = s'_V(s_V^{-1}(b)) \circ f'_{UV}(s_U^{-1}(a)) \circ (s_U^{-1})'(a)$, называется производной (или дифференциалом, или касательным отображением) отображения f в точке a.

Предложение 3. *Определение производной корректно, т.е. не зависит от выбора систем координат U и V.*

Доказательство. Пусть U_1, V_1 — другая пара координатных систем. Тогда $f_{U_1V_1} = (s_{V_1}^{-1} \circ s_V) \circ f_{UV} \circ (s_U^{-1} \circ s_{U_1})$. Утверждение теперь следует из теорем о производной композиции и производной обратного отображения (линейных пространств). □

Пример 8. Пусть $f : M_1 \to M_2$ — ограничение гладкого отображения линейных пространств, как в примере 7, и пусть $f(a) = b$. Вычислением проверяется, что в этом случае $F'(a)T_aM_1 \subset T_bM_2$, и $f'(a) = F'(a)|_{T_aM_1}$.

Предложение 4 (правило дифференцирования сложной функции для многообразий). *Пусть M_1, M_2, M_3 — многообразия. Пусть отображение $f : M_1 \to M_2$ имеет производную в точке a, а отображение $g : M_2 \to M_3$ имеет производную в* *точке $b = f(a)$. Тогда отображение $h = g \circ f : M_1 \to M_3$ имеет производную в точке a, и $h'(a) = g'(b) \circ f'(a)$.*

Предложение 5 (правило дифференцирования обратной функции для многообразий). *Пусть $f : M_1 \to M_2$ — отображение, обратимое в некоторой окрестности точки a и такое, что его производная $f'(a)$ обратима. Тогда отображение $f^{-1} : M_2 \to M_1$ имеет производную в точке $b = f(a)$, и $(f^{-1})'(b) = (f'(a))^{-1}$.*

Предложение 6 (теорема об обратной функции для многообразий). *Пусть $f : M_1 \to M_2$ — отображение, имеющее в некоторой окрестности точки $a \in M_1$ непрерывную производную. Пусть производная $f'(a)$ — обратимый оператор. Тогда существуют окрестность $U \subset M_1$ точки a и окрестность $V \subset M_2$ точки $b = f(a)$ такие, что f является взаимно однозначным отображением $U \to V$, и обратное отображение $f^{-1} : V \to U$ непрерывно дифференцируемо.*

Все эти утверждения доказываются применением соответствующих теорем для линейных пространств к координатным записям отображений.