ЛЕКЦИЯ 4

Abstract. Приведение к нормальной форме отображения многообразий в окрестности неособой точки и функции на многообразии в окрестности невырожденной особой точки.

Пусть N, M — гладкие многообразия размерностей n и m соответственно. Точка $a \in N$ называется *неособой* для гладкого отображения $f : N \to M$, если $\operatorname{Rk} f'(a) = \min(m, n)$.

Теорема 1 (о нормальной нормальная форме отображения вблизи неособой точки). *Пусть a — неособая точка отображения f, и $b = f(a)$. Тогда существуют такие системы координат $P \ni a$ и $Q \ni b$, что отображение $f_{PQ} : P \to Q$ имеет вид $f_{PQ}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$ при $m \le n$ и $f_{UV}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ при $m > n$. является линейным.*

Утверждение из линейной алгебры 1. *Пусть $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор ранга k. Тогда в $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ существуют такие базисы, что матрица оператора $A = (a_{ij})$ в этих базисах имеет следующий вид: $a_{ii} = 1$ при $i = 1, \dots, k$, и $a_{ij} = 0$ при всех остальных i, j.*

Доказательство теоремы 1. В силу утверждения 1 из линейной алгебры, теорема эквивалентна утверждению о существовании таких систем координат U, V, что отображение f_{UV} является линейным. Кроме того, поскольку произвольная система координат на многообразии отождествляет достаточно малую окрестность произвольной точки с открытым множеством в линейном пространстве, при доказательстве теоремы 1 мы можем считать, что многообразия это просто линейные пространства: $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$.

Пусть сначала $n \ge m$. Тогда отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условиям параметрической теоремы об обратной функции; в обозначениях этой теоремы нужно взять в $\mathbb{R}^n$ в качестве параметризации $s_Q : U \times V \to \mathbb{R}^n$, где $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^{n-m}$, $s_Q(u, v) = (g(u, v), v)$.

Случай $n < m$ сводится к случаю $n = m$ (который уже разобран) следующим образом: пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ — подпространство, трансверсальное к образу оператора $f'(a)$; $\dim X = m - n$. Определим вспомогательное отображение $F : \mathbb{R}^n \times X \to \mathbb{R}^m$ формулой $F(u, v) = f(u) + v$. Нетрудно проверить, что $F'(a, 0)$ — невырожденный оператор; теперь находим для отображения F нужную систему координат — она подходит и для отображения f. $\square$

Напомним, что оператор $A^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется сопряженным к оператору $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, если $(Ax, y) = (x, Ay)$, где $x, y \in \mathbb{R}^n$ — произвольные векторы, а $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение. Оператор A называется симметрическим, если $A = A^*$, и кососимметрическим, если $A = -A^*$. Множество симметрических операторов обозначим $\operatorname{Sym}(\mathbb{R}^n)$.

Базис $e_1, \dots, e_n$ в $\mathbb{R}^n$ называется ортогональным, если $(e_i, e_j) = 0$ для всех $i, j = 1, \dots, n$, $i \ne j$.

Утверждение из линейной алгебры 2. *Оператор A тогда и только тогда является самосопряженным, когда его матрица в каком-нибудь ортогональном базисе симметрическая: $a_{ij} = a_{ji}$.*

Теорема 2 (лемма Адамара)**.** *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция, дважды непрерывно дифференцируемая в окрестности начала координат и такая, что $f(0) = 0$ и $f'(0) = 0$. Обозначим $H = (h_{ij})(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0))$. Тогда существует такое отображение $A : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n)$, что $A(0) = H/2$ и в некоторой окрестности $U \subset \mathbb{R}^n$ начала координат выполнено равенство $f(x) = (A(x)x, x)$.*

Доказательство. Пусть U — шар с центром в начале координат, в котором f дважды непрерывно дифференцируема. Пусть $x \in U$, и $F(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f(tx)$, где $t \in [0,1]$. Тогда $F(0) = 0$, $F'(0) = 0$, откуда $f(x) = F(1) = \int_0^1 F'(t)\,dt = \int_0^1 \int_0^t F''(\tau)\,d\tau dt = \int_0^1 \int_0^t (f''(\tau x)x, x)\,d\tau dt$ (заметим, что f' — линейный оператор $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, т.е. элемент $(\mathbb{R}^n)^*$, а f'' — линейный оператор $\mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$. Мы отождествляем $(\mathbb{R}^n)^*$ с $\mathbb{R}^n$ при помощи скалярного произведения). Осталось положить $A(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_0^1 \int_0^t f''(\tau x)\,d\tau dt$. Самосопряженность следует из равенства $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, выполненного для всех дважды непрерывно дифференцируемых функций, и из утверждения 2 из линейной алгебры. $\square$

H называют матрицей Гессе функции f в точке 0; выражение $(Hx, x)/2$ — второй член формулы Тейлора для функции f в точке 0.