ЛЕКЦИЯ 5

Пусть $A \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n)$. Число λ называется собственным значением оператора A, если существует такое линейное подпространство $V_\lambda \subset \mathbb{R}^n$, что $Ax = \lambda x$ для всех $x \in V_\lambda$. Максимально возможная размерность V_λ называется кратностью собственного значения λ. Пара (p,q), где p — сумма кратностей положительных собственных значений оператора A, а q — сумма кратностей отрицательных, называется сигнатурой A.

Утверждение из линейной алгебры 1. *Для всякого симметрического оператора $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ существует базис, в котором он диагонален.*

Лемма 1. *Пусть $A \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n)$ — оператор, не имеющий нулевых и взаимно противоположных собственных значений. Тогда линейный оператор $q_A : \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n)$, заданный формулой $q_A X \overset{def}{=} AX + XA$, обратим.*

Доказательство. Рассмотрим базис, в котором оператор A диагонален (такой базис существует по утверждению 1 из линейной алгебры): $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Пусть $AX + XA = 0$, где оператор X имеет в этом базисе матрицу (x_{ij}). Тогда $\forall i,j\ (\lambda_i + \lambda_j)x_{ij} = 0$. Поскольку среди чисел $(\lambda_i + \lambda_j)$ по условию леммы нет нулей, получим $\forall i,j\ x_{ij} = 0$. Таким образом, оператор q_A не имеет ядра. $\square$

Утверждение из линейной алгебры 2. *Пусть $A \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n)$, (p,q) — сигнатура A. Тогда $\mathrm{Rk}\, A = p + q$.*

Утверждение из линейной алгебры 3. *Пусть $A \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n)$, $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — обратимый линейный оператор. Тогда сигнатуры (p,q) операторов A и X^*AX одинаковы. Существует такой оператор X, что $B = X^*AX$ имеет в стандартном базисе $\mathbb{R}^n$ матрицу (b_{ij}), где $b_{ii} = 1$ при $i = 1, \dots, p$, $b_{ii} = -1$ при $i = p+1. \dots, p+q$, и $b_{ij} = 0$ при всех остальных i, j.*

Для произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ матрицей Гессе в точке a называется симметрическая матрица $H[f](a) \overset{\mathrm{def}}{=} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)$.

Пусть M — гладкое многообразие, $a \in M$; $f : M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Точка a называется критической, если $f'(a) = 0$ (как оператор $T_a \to \mathbb{R}$). Критическая точка называется невырожденной, если для некоторой карты $U \ni a$ матрица Гессе $H[f_U](s_U^{-1}(a))$ (матрица вторых производных отображения $f_U = s_U \circ f$ в точке $s_U^{-1}(a)$) невырождена.

Лемма 2. *Пусть a — критическая точка гладкой функции $f : M \to \mathbb{R}$. Сигнатура матрицы Гессе $H[f_U](s_U^{-1}(a))$ не зависит от системы координат s_U.*

Из леммы 2 и утверждения 2 из линейной алгебры следует, что понятие невырожденной критической точки также не зависит от системы координат.

Доказательство леммы 2. Как обычно, можно считать, что $M = \mathbb{R}^m$. Пусть, для удобства, $s_U(0) = 0$; достаточно показать, что матрицы Гессе функций f и f_U в точке 0 имеют одинаковую сигнатуру.

Действительно, $f_U'(x) = f'(s_U(x)) \circ s_U'(x)$, откуда следует (ввиду того, что $f'(0) = 0$, что $f_U''(0) = (s_U')^*(0) \circ f''(0) s_U'(0)$ — применим теперь утверждение 3 из линейной алгебры. □

Таким образом, можно говорить о сигнатуре критической точки функции на многообразии.

Теорема 1 (лемма Морса). *Пусть M — гладкое многообразие, $f : M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, $a \in M$ — невырожденная критическая точка, и $f(a) = 0$. Тогда в окрестности $U \ni a$ существует такая система координат, что $f_U(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2$, где $(p, n-p)$ — сигнатура критической точки a функции f.*

Следствие 1. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — — функция, дважды непрерывно дифференцируемая в окрестности начала координат и такая, что $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ и матрица Гессе $H = H[f](0)$ невырождена. Тогда существует такая окрестность $U \subset \mathbb{R}^n$ начала координат и такой диффеоморфизм $D : U \to U$, что $f(D(x)) = (Hx, x)/2$ и $D'(0) = I$ (единичный оператор).*

Отображение D называется диффеоморфизмом, если оно гладкое, обратимое, и обратное к нему также гладкое. Следствие 1 эквивалентно лемме Морса в силу утверждения 3 из линейной алгебры.

Доказательство следствия 1. Матрица H не имеет нулевых собственных чисел; предположим вначале, что взаимно противоположные собственные числа также отсутствуют. По лемме Адамара $f(x) = (A(x)x, x)$, где $A(0) = H/2$. Определим отображение $F : \mathbb{R}^n \times \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n)$ равенством $F(x, B) = BA(Bx)B - A(0)$. Нетрудно видеть, что $F'(0, I) = q_H$ (где q — отображение из леммы 1), и, следовательно, F удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции. Поэтому в некоторой окрестности начала координат существует функция $x \mapsto B(x) \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^n)$ такая, что $B(0) = I$ и $f(B(x)x) = (A(B(x)x)B(x)x, B(x)x) = (B(x)A(B(x)x)B(x)x, x) = (B(0)A(0)B(0)x, x) = (Hx, x)/2$ — таким образом, можно взять $D(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} B(x)x$.

Для произвольной невырожденной матрицы H рассмотрим разложение $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l$, где подпространство $\mathbb{R}^k$ соответствует положительным, а $\mathbb{R}^l$ — отрицательным собственным значениям. Рассмотрим линейный оператор $C : \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l$, заданный равенством $C(u, v) = (Mu, v)$, где $M > 0$ — достаточно велико. Тогда функция $f_C = f \circ C$ удовлетворяет условиям леммы Морса, а ее матрица Гессе $H(f_C)(0) = CH(f)(0)C$ не имеет взаимно противоположных собственных чисел. Пусть $\widetilde{D}$ — диффеоморфизм для функции f_C; положим $D = \widetilde{D} \circ C^{-1}$. □