ЛЕКЦИЯ 7

Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n_+$; обозначим $\Pi(a,p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \le x_i \le a_i + p_i\}$ (параллелепипед); мерой параллелепипеда $\Pi(a,p)$ назовем число $\operatorname{meas}\Pi(a,p) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n p_i$; размером — число $\|p\|$, где $\|\cdot\|$ — произвольная норма.

Говорят, что подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует конечный набор параллелепипедов, покрывающих U и таких, что сумма их мер меньше ε.

Разбиением пространства $\mathbb{R}^n$ называется набор из n последовательностей $x_k^{(i)}$, где $i = 1,\dots,n$, $k \in \mathbb{Z}$, и существуют такие константы $c, C > 0$, что $c \le x_{k+1}^{(i)} - x_k^{(i)} < C$ для всех k и i. Тем самым $\mathbb{R}^n$ представлено в виде объединения параллелепипедов занумерованных точками множества $\mathbb{Z}^n$: $\Pi_\ell = \Pi((x_{\ell_1}^{(1)},\dots x_{\ell_n}^{(n)}),(x_{\ell_1+1}^{(1)} - x_{\ell_1}^{(1)},\dots x_{\ell_n+1}^{(n)} - x_{\ell_n}^{(n)}))$; эти параллелепипеды не имеют общих внутренних точек и покрывают все $\mathbb{R}^n$. Мелкость $\mu(\tau)$ разбиения τ — точная верхняя грань множества размеров всех параллелепипедов. Элементами $\mathcal{I}$ являются всевозможные пары (τ,ξ), где τ — разбиение $\mathbb{R}^n$, а $\xi = \{\xi_\ell \in \Pi_\ell,\ \ell \in \mathbb{Z}^n\}$ — набор точек, по одной в каждом параллелепипеде. Еще, по определению, элементом $\mathcal{I}$ является идеальное разбиение ∞. Топология в $\mathcal{I}$ дискретна на $\mathcal{I} \setminus \{\infty\}$, а базу окрестностей элемента ∞ составляют все множества $R_\varepsilon = \{\infty\} \cup \{(\tau,\xi) \mid \mu(\tau) < \varepsilon\}$.

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция с компактным носителем; $(\tau,\xi) \in \mathcal{I}$. Суммой Римана называется величина $\mathcal{R}(f,\tau,\xi) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^n} f(\xi_\ell)\operatorname{meas}\Pi_\ell$ (сумма конечна, поскольку носитель компактен); интегралом Римана — предел $\int_{\mathbb{R}}^n f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{(\tau,\xi)\to\infty} \mathcal{R}(f,\tau,\xi)$.

Предложение 1. *Для всякой непрерывной на $\mathbb{R}^n$ функции с компактным носителем интеграл $\int_{\mathbb{R}}^n f(x)\,dx$ существует.*

Доказательство. (практически повторяет доказательство соответствующей одномерной теоремы): проверим, что отображение $\mathcal{R}(f,\cdot,\cdot) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, фундаментально в точке $\infty \in \mathcal{I}$. Носитель функции f компактен и, следовательно, лежит внутри параллелепипеда Π размера S (мера такого параллелепипеда не превосходит S^n). По теореме о равномерной непрерывности, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если $\|x - y\| < \delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(2S^n)$. Пусть теперь τ_1, τ_2 — два разбиения с мелкостью, меньшей δ. Образуем разбиение τ, беря попарные пересечения всех параллелепипедов, вошедших в τ_1 и τ_2. Тогда $|\mathcal{R}(f,\tau,\xi) - \mathcal{R}(f,\tau_i,\xi_i)| < \varepsilon/2$ (здесь $i = 1,2$) и, следовательно, $|\mathcal{R}(f,\tau_1,\xi_1) - \mathcal{R}(f,\tau_2,\xi_2)| < \varepsilon$ — фундаментальность доказана, а вместе с ней и существование предела. □

Предложение 2. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — объединение конечного числа параллелепипедов, и пусть $f : \partial U \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, ограниченная по модулю константой C. Тогда существует функция $F : U \to \mathbb{R}$, также непрерывная и ограниченная по модулю константой C, для которой $F|_{\partial U} = f$.*

Доказательство. Пусть сначала U — параллелепипед; $m \in U$. Для произвольной точки $x \in U$ пусть $a(x) \in \partial U$ — точка пересечения прямой mx с ∂U. Положим по определению $F(x) = f(a(x))\,|x - m|\,/\,|a(x) - m|$.

Пусть теперь U — произвольное объединение параллелепипедов. Подразобьем его так, чтобы параллелепипеды не имели общих внутренних точек. Продолжим сначала функцию на те части границ параллелепипедов, которые не лежат в ∂U — здесь нужно воспользоваться индукцией по размерности. После этого продолжим функцию внутрь каждого параллелепипеда по отдельности. □

Теорема 1. *Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, имеющая компактный носитель, ограниченная и такая, что ее множество точек разрыва имеет меру нуль, интегрируема.*

Доказательство. Пусть $|f(x)| \le C$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть U_ε — конечное объединение параллелепипедов с общей мерой, меньшей ε, покрывающее множество точек разрыва функции f. Согласно предложению 2, существует непрерывная функция f_ε такая, что $f(x) = f_\varepsilon(x)$ при $x \notin U_\varepsilon$, и $|f_\varepsilon(x)| \le C$. Поскольку $|\mathcal{R}(f,\tau,\xi) - \mathcal{R}(f_\varepsilon,\tau,\xi)| \le C\varepsilon$, отображение $(\tau,\xi) \mapsto \mathcal{R}(f,\tau,\xi)$ фундаментально и, следовательно, имеет предел в точке $\infty \in \mathcal{I}$. □

Теорема 2. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция с компактным носителем. Тогда $\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dx\right)\,dy$.*

Доказательство. Сходимость $\mathcal{R}_x(f,\tau,\xi) \to \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dx$ равномерна по y. Действительно, пусть τ_1,τ_2 — разбиения $\mathbb{R}^n$. Если $\delta > 0$ таково, что при $\mu(\tau_1), \mu(\tau_1) < \delta$ выполнено неравенство $|\mathcal{R}(f,\tau_1,\xi_1) - \mathcal{R}(f,\tau_2,\xi_2)| <$

ε, то это же неравенство выполнено для разбиений $\tau_1^{(y)}, \tau_2^{(y)}$, аффинного подпространства $\mathbb{R}^n \times \{y\}$ с мелкостью, меньшей δ и с произвольным y. Поэтому отображение $(\tau^{(y)}, \xi^{(y)} \to \mathcal{R}(f, \tau^{(y)}, \xi^{(y)}$ равномерно фундаментально и, следовательно, равномерно сходится. Из равномерности утверждение теоремы вытекает стандартным образом. $\square$

Теорема 3. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция с компактным носителем, $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемое отображение, производная которого $G'(x)$ невырождена при всех x. Тогда $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,|\det G'(x)|\;dx$.*

Доказательство теоремы см. следующую лекцию.