ЛЕКЦИЯ 8

Лемма. *Пусть $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемое отображение, для которого $G(0) = 0$ и производная $G'(0)$ невырождена. Тогда в некоторой окрестности нуля существуют такие отображения $g_1, \dots, g_n$ и $B_1, \dots, B_n$, что $G = g_n \circ B_n \circ \dots \circ g_1 \circ B_1$. Здесь B_i — линейное отображение, меняющее местами два вектора из стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$ (либо тождественное), а $g_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \dots, x_{i-1}, h_i(x_1, \dots, x_n), x_{i+1}, \dots, x_n)$ (i-я координата равна $h_i(x)$, а остальные такие же, как у аргумента), причем $h_i(0) = 0$.*

Отображения типа g_i назовем "простыми".

Доказательство. Индукция по $m = 1, \dots, n$: пусть после $m-1$ шага $G(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{m-1}, G_m(x), \dots, G_n(x))$. Из невырожденности $G'(0)$ следует, что существует $j \ge m$ такое, что $\frac{\partial G_m}{\partial x_j}(0) \ne 0$. Определим теперь B_m как линейное отображение, меняющее местами j-й и m-й векторы стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$. После его применения можно считать, что $\frac{\partial G_m}{\partial x_m}(0) \ne 0$.

Определим теперь $h_m(x) = G_m(x)$. Нетрудно видеть, что $g'_m(0)$ — невырожденное отображение, поэтому по теореме о неявной функции в некоторой окрестности 0 существует отображение g_m^{-1}. Нетрудно видеть, что $\widetilde{G} \stackrel{\text{def}}{=} G \circ g_m^{-1}$ имеет вид $\widetilde{G}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m, \widetilde{G_m}(x), \dots, \widetilde{G_n}(x))$, чем завершается шаг индукции. После n шагов имеем $G = \mathrm{id}$, и лемма доказана. $\square$

Доказательство формулы замены переменных. Из формулы Ньютона–Лейбница следует, что теорема верна при $n = 1$.

Отсюда и из теоремы о сведении кратного интеграла к повторному вытекает, что теорема верна, если G — "простое" отображение (см. лемму). Нетрудно видеть также, что теорема верна для отображений B_i, упомянутых в лемме.

Поскольку $(G_1 \circ G_2)' = G'_1 \circ G'_2$, $\det AB = \det A \cdot \det B$, и $|xy| = |x| \cdot |y|$, теорема верна для композиции $G_1 \circ G_2$, если она верна для каждого из отображений G_1, G_2 в отдельности.

Теперь из леммы вытекает, что теорема верна, если носитель функции f содержится в той окрестности начала координат, в которой выполнено утверждение леммы. Для произвольной функции f теорема доказывается применением разбиения единицы. $\square$

Два базиса линейного пространства V назовем одинаково ориентированными, если матрица перехода между ними и меет положительный определитель. Очевидно, отношение "быть одинаково ориентированными" — отношение эквивалентности, относительно которого все множество базисов распадается на два класса, называемых ориентациями линейного пространства V.

Система координатных окрестностей U, покрывающая все многообразие, в каждой из которых выбрана параметризация s_U, называется атласом. Атлас называется ориентированным, если для произвольной точки a и двух координатных окрестностей $U_1 \ni a$ и $U_2 \ni a$ выполнено неравенство $\det(s'_{U_2}(s_{U_2}^{-1}(a)) \circ (s_{U_1}^{-1})'(a)) > 0$. Говорят, что два ориентированных атласа определяют одну и ту же ориентацию, если их объединение — ориентированный атлас. Нетрудно видеть, что отношение "определять одну и ту же ориентацию" — отношение эквивалентности на множестве атласов; класс эквивалентности называется ориентацией многообразия.

Нетрудно также видеть, что ориентация многообразия M определяет ориентацию каждого из касательных пространств T_aM: выберем в качестве базиса в пространстве $T_aM = s'_U(s_U^{-1}(a))(\mathbb{R}^m)$ образ стандартного базиса в $\mathbb{R}^m$ при действии отображения $s'_U(s_U^{-1}(a))$; при этом различные параметризации s_U из одного и того же ориентированного атласа дадут одну и ту же ориентацию в T_aM.

Пусть X — топологическое пространство. Говорят, что точки $x_0, x_1 \in X$ соединимы кривой, если существует соединяющая их кривая, т.е. непрерывное отображение $\gamma : [0,1] \to X$ такое, что $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$. Отношение "быть соединимым кривой", очевидно, является отношением эквивалентности; классы эквивалентности называются компонентами линейной связности пространства X. Пространство X называется линейно связным, если имеет ровно одну компоненту линейной связности.

Теорема 1. *Всякое линейно связное многообразие $M \subset \mathbb{R}^N$ либо неориентируемо, либо имеет в точности две ориентации.*

Доказательство. Пусть $A_1 = \{(U_i, s_{U_i})\}$, $A_2 = \{(V_i, s_{V_i})\}$ — два локально конечных ориентированных атласа. Предположим, что $a \in U_j \cap V_j$, и обозначим $\sigma_{ij}(a) = \operatorname{sgn}\det(s'_{U_i}(s_{U_i}^{-1}(a)) \circ (s_{V_j}^{-1})'(a))$. Докажем, что число $\sigma_{ij}(a) = \pm 1$ всегда одинаково — из этого, очевидно, вытекает утверждение теоремы.

Заметим прежде всего, что $\sigma_{ij}(a) = \operatorname{sgn}\det(s'_{U_k}(s_{U_k}^{-1}(a)) \circ (s_{U_i}^{-1})'(a)) \cdot \sigma_{kj}(a)$; при этом первый множитель равен 1, поскольку атлас A_1 ориентирован. То же самое касается замены второго индекса. Отсюда вытекает, что число $\sigma_{ij}(a)$ не зависит от i и j, а только от точки a — будем его обозначать $\sigma(a)$. Для определенности будем считать, что в какой-то наперед выбранной точке a имеем $\sigma(a) = 1$.

Пусть теперь $b \in M$; соединим точки a и b кривой γ, и обозначим $T = \{t \in [0,1] \mid \sigma(\gamma(t)) = 1\}$. Очевидно, множество T непусто и открыто; докажем его замкнутость. Пусть $\tau_n \to \tau$ при $n \to \infty$, где $\tau_n \in T$. Пусть $\sigma(\tau) = -1$. Это означает, что для каких-то i и j имеем $\gamma(\tau) \in U_i \cap V_j$, и $\sigma_{ij}(\gamma(\tau)) = -1$. Множество $U_i \cap V_j$ открыто; нетрудно видеть, что компоненты линейной связности открытого множества открыты. Отсюда следует, что для всех достаточно больших n точка $\gamma(\tau_n)$ принадлежит той же компоненте линейной связности множества $U_i \cap V_j$, что и $\gamma(\tau)$, и поэтому $\sigma(\gamma(\tau_n)) = \sigma_{ij}(\gamma(\tau_n)) = \sigma_{ij}(\gamma(\tau)) = -1$ вопреки выбору точек τ_n.

Множество $T \subset [0,1]$ открыто, замкнуто и непусто — следовательно, $T = [0,1]$. $\square$

Пусть теперь $M \subset \mathbb{R}^N$ — гладкое ориентированное многообразие, и $f : M \to \mathbb{R}$. Выберем ориентированный атлас $\{U_i\}$, и во всех подпространствах T_bM, где $b \in U_i$, выберем ортонормированные базисы $v_1^b, \dots, v_m^b$, согласованные с ориентацией пространства T_bM. Пусть $s_{U_i}(0) = b$, и $\mu_i(b)$ — матрица отображения $s'_{U_i}(0) : \mathbb{R}^m \to T_b M$, записанная в базисах $\{e_i\}, \{v_i\}$, где $\{e_i\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^m$. Назовем интегралом от функции f по окрестности U_i величину $\int_{U_i} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(s_{U_i}(x))\,|\mu_i(s_{U_i}(x))|\,dx$. Если $\operatorname{supp} f \subset U_i$, то по определению $\int_M f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_{U_i} f(x)\,dx$. В противном случае пусть $\{\varrho_i\}$ — разбиение единицы, соответствующее покрытию $\{U_i\}$. Положим по определению $\int_M f(x)\,dx = \sum_i \int_{U_i} \varrho_i(x) f(x)\,dx$.

Теорема 2. *Определение интеграла от функции по многообразию корректно, т.е. не зависит от используемых координат и разбиений единицы.*

Подчеркнем, что интеграл зависит от выбранной ориентации (меняется знак), и для неориентируемых многообразий вообще не может быть определен. Интеграл зависит также зависит от выбранного скалярного произведения в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^N$. Причины этой зависимости будут выяснены позже.

Доказательство. Независимость от используемых координат при фиксированном наборе координатных окрестностей $\{U_i\}$ следует из формулы замены переменных в кратном интеграле. Пусть теперь имеются два атласа $\{U_i\}$ и $\{V_i\}$, и соответствующие разбиения единицы $\{\varrho_i\}$ и $\{\tau_i\}$. Тогда $\sum_i \int_{U_i} \varrho_i(x) f(x)\,dx = \sum_{i,j} \int_{U_i \cap V_j} \varrho_i(x)\tau_j(x) f(x)\,dx = \sum_j \int_{V_j} \tau_j(x) f(x)\,dx$. □

Если многообразие M компактно, то определен интеграл $\int_M 1 \cdot dx$, называемый объемом (или мерой) M.