# ЛЕКЦИЯ 9

Abstract. Определение абстрактного многообразия, ориентируемого многообразия, гладкого отображения. Теоремы (без доказательства) об однозначности размерности, о вложении и о паракомпактности. Теорема о разбиении единицы.

*Гладким $m$-мерным многообразием* называется множество $M$, на котором задан *атлас*, т.е. набор троек $\{(U_\alpha, V_\alpha, s_\alpha)\}$, где $U_\alpha \subset M$ называются *картами*, $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ — открытые подмножества, и $s_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha$ — взаимно однозначные соответствия (*параметризации*). При эт ом предполагается, что выполнены следующие условия:

1. $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$.
2. Пусть $U_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} U_\alpha \cap U_\beta$, и $V_{\alpha\beta} = s_\alpha^{-1}(U_{\alpha\beta}) \subset V_\alpha$, $V_{\beta\alpha} = s_\beta^{-1}(U_{\alpha\beta}) \subset V_\beta$. Тогда *отображение перехода* $\tau_{\alpha\beta} = s_\beta^{-1} \circ s_\alpha : V_{\alpha\beta} \to V_{\beta\alpha}$ является гладким.

Слово "гладкий" у нас будет означать "имеющий производные всех порядков". Если слово "гладкий" означает "имеющий непрерывные производные до порядка $n$ включительно", получится определение *многообразия класса $C^n$*.

Атлас позволяет ввести на $M$ структуру топологического пространства. А именно, базу открытых множеств в нем составляют множества вида $s_\alpha(W)$, где $W \subset V_\alpha$ — открытое множество. В частности, все множества $U_\alpha \subset M$ открыты, откуда вытекает, что каждая точка на многообразии обладает окрестностью, гомеоморфной некоторому открытому подмножеству в $\mathbb{R}^m$.

3. Топологическое пространство, определенное по атласу, является отделимым — у любых двух различных точек его существуют непересекающиеся окрестности.

*Предупреждающий пример* 1. В отсутствие требования 3 был бы возможен следующий пример одномерного многообразия ($\mathbb{R}$ с удвоенной точкой 0): $M = \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{0', 0''\}$. В качестве карт можно взять $U_1 = M \setminus \{0'\}$ и $U_2 = M \setminus \{0''\}$. При этом $V_1 = V_2 = \mathbb{R}$; параметризация $s_1$ переводит $0 \in \mathbb{R}$ в $0'' \in M$, а остальные действительные числа — в себя; $s_2$ — аналогично. Здесь выполнены требования 1 и 2, но точки $0'$ и $0''$ не имеют непересекающихся о крестностей.

Будем говорить, что два атласа на одном и том же множестве $M$ задают одинаковую структуру многообразия, если их объединение опять является атласом (т.е. отображения перехода от карт одного атласа к картам другого — гладкие). Мы предполагаем еще, что

4. Для данного атласа $A$ существует атлас $A_1$, задающий ту же самую структуру многообразия и состоящий из конечного или счетного числа карт.

Атлас на многообразии называется *ориентированным*, если $\det \tau'_{\alpha\beta}(x) > 0$ для всех $x \in V_{\alpha\beta}$. Многообразие *ориентировано*, если на нем задан ориентируемый атлас, и *ориентируемо*, если такой атлас существует.

Отображение $f : M \to N$ двух многообразий (размерностей $m$ и $n$) называется *гладким*, если для произвольной точки $a \in M$, карты $U \ni a$ и карты $V \ni f(a)$ на многообразии $N$ отображение $f_{UV} \stackrel{\mathrm{def}}{=} s_V^{-1} \circ f \circ s_U : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — гладкое. ($f_{UV}$ называют представлением отображения $f$ в координатах $U, V$.) Отображение $f$ называется *диффеоморфизмом*, если оно гладкое, обратимое, и обратное к нему также гладкое.

Подмножество $N \subset M$ называется *подмногообразием*, если $N$ обладает такой структурой многообразия, при котором отображение вложения $\iota : N \to M$ — гладкое и невырожденное во всех точках, а топология, порожденная на $N$ структурой многообразия, совпадает с топологией, порожденной на $N$ как на подмножестве $M$. Невырожденность гладкого отображения $f : N \to M$ в точке $a \in N$ означает, что производная $f'_{UV}(a)$ имеет максимально возможный ранг (очевидно, это понятие не зависит от выбора координат $U, V$).

*Пример* 2. Произвольное открытое подмножество в $\mathbb{R}^m$ обладает структурой $m$-мерного многообразия с атласом из 1 карты.

*Пример* 3. Произвольное $m$-мерное подмногообразие в линейном пространстве (в смысле предыдущих лекций) — действительно мн огообразие, и причем является подмногообразием в $\mathbb{R}^N$, рассматриваемом как $N$-мерное многообразие.

*Пример* 4. Тор $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ обладает структурой $n$-мерного многообразия. Для произвольной точки $a \in \mathbb{R}^n$ выберем открытое множество $V_a$ такое, что при параллельном переносе $V_a$ на вектор с целыми координатами получается множество, с $V_a$ не пересекающееся. Обозначим $U_a \subset \mathbb{T}^n$ образ множества $V_a$ при факторизации, и $s_a : U_a \to V_a$ — отображение факторизации. Нетрудно проверить, что $\{(V_a, U_a, s_a\}$ — атлас.

*Предупреждающий пример* 5. Рассмотрим тор $\mathbb{T}^2$ и в нем иррациональную обмотку $m_\alpha$— образ при факторизации прямой $\ell_\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(x, y) \mid y = \alpha x\}$, где $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Множество $m_\alpha \subset \mathbb{T}^2$ по построению обладает структурой одномерного многообразия с единственной картой $(m_\alpha, \ell_\alpha, \pi)$, где $\pi$ — проекция. Отображение вложения $m_\alpha \hookrightarrow \mathbb{T}^2$ — гладкое. Однако $m_\alpha \subset \mathbb{T}^2$ — плотное подмножество, и поэтому подмногообразием не является.

Очевидно, многообразия разных размерностей не диффеоморфны друг другу, причем даже локально: у отображения $f : M \to N$ производная $f'_{UV}(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ не является обратимой, поскольку $m \neq n$. Оказывается, размерность “видна” уже на уровне топологии многообразия:

**Фундаментальная теорема 1.** *Открытые подмножества линейных пространств разной размерности не гомеоморфны друг другу.*

Из этой теоремы вытекает, что многообразия разных размерностей не гомеоморфны друг другу, причем даже локально.

*Пример* 6. Объединение $X$ двух координатных осей в $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфно никакому многообразию. Действительно, малая окрестность точки $(1, 0)$ гомеоморфна интервалу в $\mathbb{R}$, поэтому $X$ может быть гомеоморфно только одномерному многообразию. Малая окрестность точки $(0, 0)$ линейно связна, но распадается на 4 компоненты линейной связности при удалении этой точки — таким свойством открытое линейно связное подмножество в $\mathbb{R}$ обладать не может.

**Фундаментальная теорема 2.** *Для всякого $m$-мерного многообразия существует подмногообразие пространства $\mathbb{R}^{2m+1}$, ему диффеоморфное.*

*Пример* 7. Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ определяется как множество одномерных подпространств (прямых) в $\mathbb{R}^{n+1}$, или, что то же самое, как множество ненулевых векторов в $\mathbb{R}^{n+1}$, рассматриваемых с точностью до умножения на ненулевое число: $\mathbb{R}P^n == (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/(w \sim \lambda w, \forall w \forall \lambda \neq 0)$. Пространство $\mathbb{R}P^n$ обладает структурой $n$-мерного многообразия. По определению, всякая точка $w \in \mathbb{R}P^n$ задается набором *однородных координат* $[w_0 : \dots : w_n]$, не равных одновременно нулю и заданных с точностью до одновременного умножения на ненулевое число. Обозначим $U_i = \{w \in \mathbb{R}P^n \mid w_i \neq 0\}$. Положим $V_i = \mathbb{R}^n$, и выберем в качестве координатного отображения $s_i([w_0 : \dots : w_n]) = (w_0/w_i, \dots, w_n/w_i)$ (разумеется, $w_i/w_i$ пропущено). Тем самым определен атлас: отображение перехода (считаем, что $j < i$) задается формулами $\tau_{ij}(x_1, \dots, x_n) = (x_1/x_{j+1}, \dots, x_j/x_{j+1}, x_{j+2}/x_{j+1}, \dots, x_i/x_{j+1}, 1/x_{j+1}, x_{i+1}/x_{j+1}, \dots, x_n/x_{j+1})$ — гладкое.

*Пример* 8. Определим теперь проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ как множество пар диаметрально противоположных точек на $n$-мерной сфере $S^n \overset{\text{def}}{=} \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$. Выберем для каждой точки $a \in S^n$ открытое множество $R_a$, не пересекающееся с центрально симметричным себе. Обозначим $U_a \subset \mathbb{R}P^n$ — образ $R_a$ при факторизации. Выберем на $S^n$ структуру многообразия так, чтобы окрестности $V_a$ были картами с параметризациями $s_a$ и областями значений координат $V_a \subset \mathbb{R}^n$. Набор $\{(U_a, V_a, \pi \circ s_a)\}$, где $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ — проекция, является атласом на $\mathbb{R}P^n$. Нетрудно видеть, что многообразия, определенные в этом примере и в примере 7, диффеоморфны (что оправдывает одинаковые обозначения). Отображение $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ непрерывно, откуда следует, что как топологическое пространство $\mathbb{R}P^n$ компактно (образ компактного пространства при непрерывном отображении). Центральная симметрия сферы $S^n$ сохраняет ориентацию, если $n$ нечетно, и обращает, если $n$ четно. Поэтому построенный атлас — ориентированный при нечетном $n$ и не ориентированный при четном. (На самом деле при четном $n$ многообразие $\mathbb{R}P^n$ неориентируемо.)

*Пример* 9. Грассманианом $G(n, k)$ называется множество $k$-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$ (так, $\mathbb{R}P^n$ это $G(n+1, 1)$). Грассманиан обладает структурой многообразия размерности $k(n-k)$. Карты нумеруются $k$-элементными подмножествами $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$. Для всякого такого $I$ обозначим $A_I$ подпространство в $\mathbb{R}^n$, натянутое на векторы стандартного базиса с номерами $i_1, \dots, i_k$. Обозначим $P_I$ проектор на такое подпространство, который все базисные векторы с номерами $i_1, \dots, i_k$ переводит в себя, а остальные базисные векторы — в нуль. Карта $U_I$ состоит из всех подпространств $B \in G(n, k)$, для которых отображение $P_I : B \to A_I$ является взаимно однозначным. Параметризация $s_I$ сопоставляет матрице $W = (w_i^j)$, где $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n-k$ подпространство, натянутое на базис из векторов $v_1, \dots, v_k$ с такими координатами: $v_s^{i_s} = 1$, $v_s^{i_t} = 0$ при $t \neq s$; если же $j \notin I$ и является $q$-м по счету числом, не входящим в $I$, то $v_s^j = w_s^q$. Нетрудно видеть, что у всякого подпространства из множества $U_I$ имеется ровно один базис описанного вида (т.е. базис, проектирующийся в стандартный базис подпространства $A_I$), откуда следует, что отображение $s_I$ взаимно однозначно. Нетрудно видеть, что отображения перехода — рациональные функции, и поэтому гладк ие. Как топологическое пространство $G(n,k)$ компактно.

**Теорема 1** (о разбиении единицы)**.** *Для каждого открытого покрытия многообразия существует разбиение единицы, подчиненное этому покрытию.*

Доказательство этой теоремы ничем не отличается от случая подмногообразий в $\mathbb{R}^N$.