ЭКЗАМЕН (26 МАЯ 2002 Г.)

Критерии оценок будут выработаны в процессе проверки, но для получения оценки «отлично» решить все задачи заведомо не обязательно.

Задача 1. Найдите объем подмножества в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2 = \{(x_1, x_2, z_1, z_2)\}$, заданного условием $|x_1| + |x_2| + |z_1| + |z_2| \leq 1$.

Задача 2. Два подмногообразия в $\mathbb{R}P^3$ заданы уравнениями $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$ и $x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 0$ соответственно ($[x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$ — однородные координаты). В каких точках эти подмногообразия касаются?

Задача 3. Рассмотрим трехмерную сферу $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$, и для произвольного $(z, w) \in S^3$ рассмотрим векторы $v_1(z, w) = (iz, iw)$, $v_2(z, w) = (-\overline{w}, \overline{z})$, $v_3(z, w) = (-i\overline{w}, i\overline{z})$ а) Докажите, что эти векторы касаются сферы в точке (z, w). б) Найдите коммутаторы векторных полей v_1, v_2, v_3.

Задача 4. Кривая $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ задана формулой $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$. Для каждой точки $p \in \gamma(\mathbb{R})$ рассмотрим касательную прямую к γ в точке p, из которой выброшена сама точка p. а) Докажите, что объединение этих прямых с выброшенными точками является гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^3$. б) Обозначим указанное подмногообразие буквой X и рассмотрим отображение $g : X \to \mathbb{R}P^2$, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ прямую, проходящую через начало координат и перпендикулярную касательной плоскости к X в точке x. Найдите критические точки отображения g.

Задача 5. Пусть $\ell \in \mathbb{R}P^3$ — прямая в $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$. Касательный вектор $X(\ell)$ это отображение, сопоставляющее каждому вектору $v \in \ell$ класс вектора iv в факторпространстве $\mathbb{R}^4/\ell$. Подмногообразие $M \subset \mathbb{R}P^3$ состоит из точек с однородными координатами $[0 : x : y : z]$. Найдите все точки $a \in M$ такие, что вектор $X(a)$ касается подмногообразия M.