Математический анализ, листок 1

В задачах 1–9 найдите производную отображения $f : X \to Y$, определите точки, где она вырождена, и найдите ее ядро в этих точках. Символом $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ обозначается линейное пространство (n^2-мерное) матриц $n \times n$ с действительными коэффициентами.

1. $X = Y = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $f(M) = M^2$.

2. $X = Y = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $f(M) = {}^tM \cdot M$ (^{t} означает транспонирование).

3. $X = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $Y = \mathbb{R}$, $f(M) = \mathrm{Tr}(M)$.

4. $X = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $Y = \mathbb{R}$, $f(M) = \det M$. а) Найдите производную в точке I (единичная матрица). б) Найдите производную в точке M, где M — невырожденная матрица. Опишите ядро производной в этой точке. в) Опишите производную в произвольной точке.

5. $X = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}), Y$ — линейное пространство многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами, $f(M)$ — характеристический многочлен матрицы M.

6. $X = Y = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $f(M) = M^{-1}$.

7. $X = Y = \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (xy, xz, yz)$.

8. $Y = \mathbb{R}^{n-1} = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_n = 0\}$, $X = \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$, где $p \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}$. $f(a)$ — точка пересечения прямой $\ell = \overline{ap}$ с подпространством $\mathbb{R}^{n-1}$.

9. $X = \mathbb{R}^n$, Y — пространство многочленов степени n с действительными коэффициентами. $f(a_1, \ldots, a_n)$ — многочлен со старшим коэффициентом 1 и корнями $a_1, \ldots, a_n$. В каких точках производная отображения f вырождена ?

Пусть $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — гладкое обратимое преобразование, заданное формулами $Q(x_1, \ldots, x_n) = (u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n))$. Чтобы различать два экземпляра $\mathbb{R}^n$, обозначим их $\mathbb{R}^n_x$ и $\mathbb{R}^n_u$, так что $Q : \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}^n_u$. Пусть $C(\mathbb{R}^n)$ — пространство функций в $\mathbb{R}^n$ (непрерывных, гладких и т.п. — в зависимости от задачи). *Оператор замены переменных* $S_Q : C(\mathbb{R}^n_u) \to C(\mathbb{R}^n_x)$ определяется равенством $S_Q(f) = f \circ Q$. Очевидно, $S_Q^{-1} = S_{Q^{-1}}$. Пусть теперь $D : C(\mathbb{R}^n_x) \to C(\mathbb{R}^n_x)$ — произвольный оператор. Оператор $D' = S_Q^{-1} \circ D \circ S_Q : C(\mathbb{R}^n_u) \to C(\mathbb{R}^n_u)$ называют “оператор D, выраженный в координатах u”.

10. Пусть $C(\mathbb{R}^2)$ — пространство гладких функций на плоскости, $D : C(\mathbb{R}^2) \to C(\mathbb{R}^2)$ — оператор, заданный формулой $D(f) = \partial^2 f/\partial x^2 - \partial^2 f/\partial y^2$. а) Выразите оператор D через операторы $\partial/\partial u \stackrel{\mathrm{def}}{=} \partial/\partial x + \partial/\partial y$ и $\partial/\partial v \stackrel{\mathrm{def}}{=} \partial/\partial x - \partial/\partial y$. б) Пусть $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — отображение, заданное формулой $Q(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (x + y, x - y)$. Выпишите оператор D в координатах u, v. Объясните связь между пунктами а) и б).

11. *Лапласианом* называется оператор $\Delta : C(\mathbb{R}^2) \to C(\mathbb{R}^2)$, заданный формулой $\Delta f = \partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2$. Выразите оператор D в полярных координатах $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \mathrm{arctg}(y/x)$.