Математический анализ, листок 2

1. Пусть $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ — многочлен с комплексными коэффициентами. Будем рассматривать его как отображение $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Если отождествить $\mathbb{C}$ с $\mathbb{R}^2$, то как выражается производная отображения P в точке $z \in \mathbb{C}$ и ее определитель (якобиан) через $P'(z)$? [Указание: начните со случая, когда P — многочлен первой степени.]

2. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, удовлетворяющая тождеству

$$f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, \ldots x_n),$$

где $n \in \mathbb{N}$ («однородная функция степени k). Докажите, что выполнено тождество

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = k \cdot f$$

(«тождество Эйлера»).

3. Пусть $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, и предположим, что в точке $p = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ имеем $f(p) = 0$, но все три частные производные от p в этой точке отличны от нуля. Тогда, согласно теореме о неявной функции, x в окрестности a выражается как функция $x = X(y, z)$, y в окрестности b выражается как функция от $y = Y(x, z)$, а z в окрестности c — как функция от $z = Z(x, y)$. Выразите произведение

$$\frac{\partial X}{\partial y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x}$$

через частные производные функции f в точке p.

4. Пусть $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, и предположим, что в точке $p = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ имеем $f(p) = 0$, но $f_x(p) \neq 0$. Тогда, согласно теореме о неявной функции, x в окрестности a выражается как функция от y и z. Выразите $\partial^2 x/\partial z^2$ в точке (b, c) через частные производные функции f в точке p.

5. При каких x, y, z, t соотношения

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 &= 1, \\ x^5 + y^5 + z^5 + t^5 &= 1 \end{aligned}$$

определяют x и y как неявные функции от z и t? При этих условиях выразите через x, y, z, t производную $\partial x/\partial t$.

6. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — гладкая функция и $C \subset \mathbb{R}^2$ — ее график. Положим

$$X = \{(k, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{прямая } y = kx + b \text{ — касательная к } C.\}$$

Тогда соотношение $(k, b) \in X$ задает k как неявную функцию от b (вообще говоря, не при всех k и b). Выразите производную dk/db через x и производные функции f.

7. В окрестности каких точек уравнение $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ определяет неявную функцию $x = \lambda(a_0, \ldots, a_{n-1})$ (постарайтесь сформулировать ответ в алгебраических терминах)? Найдите производную этой функции.

8. Рассмотрим $\mathbb{R}^6$ как пространство вещественных 2×3-матриц. Пусть $X \subset \mathbb{R}^6$ — подмножество, состоящее из матриц ранга 1. Докажите, что X является гладким многообразием размерности 4.

9*. Рассмотрим $\mathbb{R}^{mn}$ как пространство вещественных $m \times n$-матриц. Пусть $X \subset \mathbb{R}^{mn}$ — подмножество, состоящее из матриц ранга r. Докажите, что X является гладким многообразием (какой размерности?).

10. Пусть $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ — комплексный многочлен, для которого при $f(z) = 0$ хотя бы одна из $df/dz_i(z)$ не обращается в нуль при $f(z) = 0$. Докажите, что условие $f(z) = 0$ определяет подмногообразие размерности $2n - 2$ в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$.