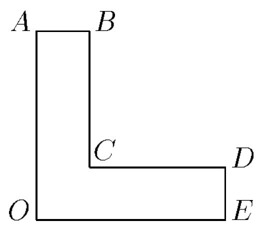
Математический анализ, листок 3

1. Пусть $\mathcal{C}$ — множество бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^2$. Определим оператор $\Delta\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, заданный формулой $f \mapsto f_{xx}+f_{yy}$, и, для $\theta \in \mathbb{R}$, оператор $F_\theta\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, заданный формулой $f \mapsto f \circ R_\theta$, где R_θ — поворот на угол θ против часовой стрелки. Покажите, что $\Delta \circ F_\theta = F_\theta \circ \Delta$.

2. Функция f непрерывна на замкнутом множестве-«уголке», изображенном на рисунке, и дифференцируема в его внутренности.



Точки O, A, B, C, D и E имеют координаты $(0,0)$, $(0,3)$, $(1,3)$, $(1,1)$, $(3,1)$ и $(3,0)$ соответственно, а частные производные f_x и f_y по модулю не превосходят единицы. Докажите, что $|f(A)-f(E)| \leqslant 4.5$.

3. Поверхность $F \subset \mathbb{R}^3$ задана уравнением

$$x^2+y^2-z^3=1.$$

В окрестности каких точек она лежит по одну сторону от своей касательной плоскости?

4. Аналогичный вопрос про поверхность, заданную уравнением

$$x^2+4y^2-z^3=1.$$

5. Пусть $C \subset \mathbb{R}^n$ — гладкая кривая (т. е. гладкое одномерное подмногообразие). Точка $p \in C$ называется ее *точкой перегиба*, если касательная прямая L в этой точке имеет касание более чем первого порядка (формальное определение: $\|r-Pr\| = o(\|r-p\|^2)$ при $r \in C$, $r \to p$, где P — ортогональная проекция на прямую L). Пусть кривая $C \subset \mathbb{R}^2$ задана уравнением $F(x,y)=0$ (частные производные функции F не обращаются одновременно в нуль на этой кривой). Выразить условие «точка $(x,y)\in C$ является точкой перегиба» в терминах частных производных функции F.

6. Кривая в $\mathbb{R}^3$ задана параметрически уравнениям $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$ (производные функций f_i не обращаются в нуль одновременно). Определим отображение $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ по формуле

$$(t,u) \mapsto (f_1(t)+uf_1'(t), f_2(t)+uf_2'(t), f_3(t)+uf_3'(t)).$$

Опишите множество критических значений отображения Φ (желательно, чтобы описание было, по возможности, «геометрическим» — не использующим формул).

7. Пусть $SL_n \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ — «специальная линейная группа» (т. е. множество матриц с определителем единица). Покажите, что SL_n является гладким подмногообразием в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ (какой размерности?) и найдите его касательное пространство в точке I (единичная матрица).

8. Пусть $SO_n \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ — «ортогональная группа» (т.е. множество таких матриц X, что ${}^tXX = I$). Покажите, что SO_n является гладким подмногообразием в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ (какой размерности?) и найдите его касательное пространство в точке I (единичная матрица).

9. Пусть

$$S^n = \{(x_0, x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$$

(n-мерная сфера). Определим отображение $f\colon S^n \to \mathbb{R}^{(n+1)(n+2)/2}$ по формуле

$$(x_0, x_1, \dots x_n) \mapsto (x_0^2, \dots, x_n^2, x_0x_1, x_0x_2, \dots, x_{n-1}x_n)$$

(в правой части перечислены все одночлены второй степени). Докажите, что $F(S^n)$ является гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^{(n+1)(n+2)/2}$, гомеоморфным n-мерному вещественному проективному пространству.