Математический анализ, мини-листок 4

1. Пусть $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ — сфера, заданная уравнением $x^2+y^2+z^2=1$, и $\pi\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ — проекция, заданная формулой $(x,y,z)\mapsto(x,y)$. Найдите критические точки и критические значения отображения π.

2. Поверхность $X \subset \mathbb{R}^3$ задана уравнением $z=y^3+xy$; найдите критические точки и критические значения отображения $\pi\colon X\to\mathbb{R}^2$, заданного формулой $(x,y,z)\mapsto(x,z)$; найдите ранги отображения в критических точках.

3. Пусть $f\in\mathbb{C}[z_1,\dots,z_n]$ — многочлен от n переменных с комплексными коэффициентами, $V=\{(z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}^n \mid f(z_n,\dots,z_n)=0\}$, и пусть $V_0\subset V$ — подмножество, состоящее из точек, в которых хотя бы одна из частных производных многочлена f отлична от нуля. Докажите, что $V_0\subset\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^{2n}$ — гладкое подмногообразие размерности $2n-2$.

4. Пусть $X\subset\mathbb{R}^3$ — гладкая поверхность (т. е. гладкое двумерное многообразие) и $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ (двумерная сфера). *Гауссовым отображением* называется отображение $\gamma\colon X\to S^2$, определенное следующим образом: $\gamma(x)$ — это конец единичного вектора, отложенного от начала координат и перпендикулярного к плоскости, касающейся поверхности X в точке x.[1] Опишите критические точки гауссова отображения для случая, когда X — тор.

5. Тот же вопрос, что в задаче 4, если поверхность X задана уравнением $x^2+y^2-z^3=1$.

6*. Пусть $C\subset\mathbb{R}^2$ — эллипс, заданный уравнением $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$ и $t\in\mathbb{R}$. Определим отображение $E\colon C\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ по формуле $(x,t)\mapsto x+tv$, где v — вектор длины 1, нормальный к эллипсу в точке x и направленный внутрь эллипса. Опишите критические точки отображения E.

[1] Таких векторов, конечно, два; чтобы дальнейшее имело смысл, надо выбирать $\gamma(x)$ так, чтобы близкие векторы были «по одну сторону» от поверхности. Локально (в окрестности данной точки) так сделать всегда можно, и для решения задач из листка этого досчтаточно. Глобально это можно сделать не всегда; от формальных уточнений мы воздержимся.