Математический анализ, листок 5

1. Найти n-мерный объем множества

$$\Delta = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1 \geqslant 0, \ldots, x_{n+1} \geqslant 0, x_1 + \cdots + x_{n+1} = 1\}$$

(это множество называется *n-мерным симплексом*).

2. Найдите интеграл от функции $f(x, y) = x^2y^2$ по кругу радиуса 1 с центром в начале координат.

3. Как известно, геометрическое место точек на плоскости, произведение расстояний которых от точек $(1; 0)$ и $(-1, 0)$ равно 1, имеет вид восьмерки («лемниската Бернулли»). Найдите площадь части плоскости, ограниченной одной из петель этой восьмерки,

4. Нарисуйте на плоскости кривую, заданную уравнением $y^2 = x^2 + x^3$, и найдите площадь части плоскости, заключенной внутри ее петли.

5. Найдите площадь поверхности и объем тора, полученного вращением круга радиуса r относительно оси, расположенной на расстоянии $R > r$ от оси.

6. Найдите объем пересечения трехмерного шара радиусом 1 с центром в начале координат и цилиндра, заданного неравенством $(x - 1/2)^2 + y^2 \leqslant 1/4$.

7. Найдите площадь части поверхности единичной сферы, лежащей внутри цилиндра из задачи 6.

8. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — функции, непрерывные на отрезке $[0; 1]$. Положим $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \det \|f_i(x_j)\|$ и обозначим через G матрицу $\|a_{ij}\|$, где $a_{ij} = \int_0^1 f_i f_j \, dx$. Докажите, что

$$\frac{1}{n!} \int_{[0;1]^n} (\Delta(x_1, \ldots, x_n))^2 \, dx_1 \ldots dx_n = \det G.$$