Математический анализ, листок 6

1. n-мерным кубом называется множество

$$\{\,(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid 0\leqslant x_i\leqslant 1\}.$$

Найдите интеграл по n-мерному кубу от функции

$$f(x_1,\dots,x_n)=\max(x_1,\dots,x_n).$$

2. Пусть $V_n=\{(x_1,...,x_n)\mid x_1^p+...+x_n^p\le 1\}$, где $p>0$. Найдите

$$\int_{V_n}((x_1^p+...+x_n^p)/n)^{1/p}\,dx_1\dots dx_n \Big/ \operatorname{vol}(V_n).$$

Центром масс множества $X\subset\mathbb{R}^n$ называется тоска $(a_1,\dots,a_n)$, где

$$a_j=\frac{1}{\operatorname{vol}X}\int_X x_j dx_1\dots dx_n.$$

3. Найдите центр масс n-мерного симплекса — выпуклой оболочки точек $(0,\dots,0)$, $(1,0,\dots,0)$, $(0,1,\dots,0)$, $\dots$, $(0,0,\dots,1)$.

4. Найдите центр масс полушария в $\mathbb{R}^n$.

5. По единичной сфере в $\mathbb{R}^3$ равномерно распределен заряд (суммарный заряд сферы равен q). Найти силу, действующую на единичный заряд, находящийся вне сферы на расстоянии R от ее центра.

6. Тот же вопрос, что в предыдущей задаче, но заряд расположен внутри сферы.

7. По единичной сфере в $\mathbb{R}^3$ равномерно распределен заряд (суммарный заряд сферы равен q). Сферу разрезали на две части плоскостью, проходящей через центр. Найдите силу взаимодействия между ее половинками.