Математический анализ, листок 7

Группой Ли называется группа G, снабженная такой структурой гладкого многообразия, что групповые операции $G \times G \to G$ (умножение) и $G \to G$ (взятие обратного) являются гладкими отображениями. Примеры: $Gl_n(\mathbb{R})$ (группа невырожденных $n \times n$-матриц), $Sl_n(\mathbb{R})$ (группа невырожденных $n \times n$-матриц с определителем 1), $SO_n(\mathbb{R})$ (группа ортогональных $n \times n$-матриц с определителем 1), U_n (группа унитарных $n \times n$-матриц).

Пусть G — Группа Ли. Ее *алгеброй Ли* называется касательное пространство к G в единице. Обозначение: $\mathrm{Lie}(G)$.

1. Опишите алгебры Ли групп $Gl_n(\mathbb{R})$, $Sl_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$, U_n.

2. Пусть $g \in G$, где G — одна из групп задачи 1. Найдите произвдную в единице отображения сопряжения $h \mapsto ghg^{-1}$.

3. Докажите, что касательные расслоения к окружности и n-мерному тору (т. е. $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$) тривиальны.

4. Докажите, что касательное расслоение к произвольной группе Ли тривиально.

5. Пусть $G = G(k, V)$ — грассманиан k-мерных векторных подпространств в n-мерном векторном пространстве V. Для точки $x \in G$ обозначим через $E_x \subset V$ соответствующее ей подпространство. Докажите, что существует канонический (т. е. не зависящий от выбора координат) изоморфизм $T_xG \cong \mathrm{Hom}(E_x, V/E_x)$.

6. В условиях задачи 5 пусть $S = \{(x, v) \in G \times V \mid v \in E_x\}$. Покажите, что на S можно ввести структуру векторного расслоения над грассманианом (оно называется «тавтологическим расслоением» или «универсальным подрасслоением»).

7. В тех же условиях пусть $Q = \{(x, w) \mid x \in G, w \in V/E_x\}$. Покажите, что на множестве Q также можно ввести структуру векторного расслоения над грассманианом (оно называется «универсальным факторрасслоением»).

8*. Какие грассманианы ориентируемы, а какие — нет?

9. Пусть G — группа Ли, и пусть $x, y \in \mathrm{Lie}(G)$. Представим x и y кривыми $\{x(t)\}$ и $\{y(t)\}$. Тогда кривая

$$t \mapsto x(\sqrt{t})y(\sqrt{t})x(\sqrt{t})^{-1}y(\sqrt{t})^{-1}$$

представляет некоторый касательный вектор в единице (т. е. элемент $\mathrm{Lie}(G)$), обозначаемый через $[x, y]$ и называемый «скобкой x и y». Опишите скобку для групп, перечисленных в задаче 1.

10. Покажите, что скобка в алгебре Ли удовлетворяет следующим тождествам:

$$[x+y, z] = [x, z] + [y, z] \qquad \text{(билинейность);}$$
$$[y, x] = -[x, y] \qquad \text{(антисимметричность);}$$
$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \qquad \text{(тождество Якоби);}$$

(Если не выйдет в общем случае, сделайте это для групп из задачи 1.)