Лекция 1. Голоморфные функции

Теория функций комплексного переменного (комплексный анализ) — очень классический, очень важный и довольно обширный раздел математики; вместить удовлетворительный курс комплексного анализа в десять лекций затруднительно даже в НМУ. Слушатели должны иметь в виду, что многие важные вещи будут в нашем курсе упомянуты лишь вскользь, а то и вовсе обойдены молчанием. Тем не менее я надеюсь, что вы получите от курса пользу и удовольствие.

Мы будем предполагать, что слушатели уже отчасти знакомы с комплексными числами, в частности, с определением показательной функции по формуле $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, с определениями синуса и косинуса комплексного числа ($\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$, $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$) и с «формулой Эйлера» $e^{iz} = \cos z + i \sin z$. Будет также предполагаться знакомство со стандартным курсом геометрии (НМУ, первый семестр): дробно-линейные преобразования, модель Пуанкаре и т. п.

Теория функций комплексного переменного изучает не произвольные функции комплексного переменного, но функции *голоморфные*. С определения голоморфной функции мы и начнем.

Заметим, что n-мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ можно рассматривать как $2n$-мерное вещественное пространство $\mathbb{R}^{2n}$. Имея в виду это отождествление, дадим

Определение 1.1. Пусть $U \subset \mathbb{C}^n$ — открытое подмножество. Функция $f\colon U \to \mathbb{C}$ называется *голоморфной*, если она принадлежит классу C^1 как отображение из $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ в $\mathbb{R}^2$ и если для всякой точки $x \in U$ ее производная $(Df)_x\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ является гомоморфизмом векторных пространств над $\mathbb{C}$ (а не только над $\mathbb{R}$).

Замечание 1.2. В дальнейшем мы увидим, что на самом деле всякая голоморфная функция принадлежит классу C^∞ (и даже более того).

В нашем курсе мы сосредоточимся на случае $n = 1$, а с функциями нескольких переменных будем иметь дело лишь постольку-поскольку. Начнем с нескольких замечаний о дифференциальных формах.

Из курса анализа вам известно понятие дифференциальной формы на гладком многообразии. Мы будем рассматривать *комплексные дифференциальные формы*: по определению, комплексная дифференциальная форма степени m на гладком многообразии X — это объект, который в локальных координатах записывается в виде

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_m} f_{i_1, i_2, \dots, i_m} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots dx_{i_m} \tag{1.1}$$

и преобразуется по известным формулам при смене локальных координат; при этом предполагается, что $f_{i_1, i_2, \dots, i_m}$ — функции класса C^1 с *комплексными* значениями (это равносильно тому, что их вещественная и мнимая часть имеют класс C^1). Легко проверить (отделяя, например, вещественную и мнимую часть), что для комплексных дифференциальных форм выполнены все свойства обычных дифференциальных форм, включая теорему Стокса, которой мы вскоре воспользуемся. В частности, если $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, и если координата в U обозначена через $z = x + iy$, то на U можно рассмотреть комплексные дифференциальные формы $dz = dx + idy$ и $d\overline{z} = dx - idy$.

Иногда мы будем также рассматривать «непрерывные» дифференциальные формы, у которых функции $f_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ в выражении (1.1) предполагаются всего лишь непрерывными, но не обязательно гладкими; легко видеть, что для таких дифференциальных форм также имеют смысл понятия обратного образа при гладком отображении, интеграла (будь то по цепи или по многообразию) и внешнего произведения; дифференцировать такие формы мы не будем (хотя это и возможно).

Имея в виду все эти соглашения, можно сформулировать следующее простое

Предложение 1.3. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество, и пусть $f\colon U \to \mathbb{C}$ — функция класса C^1. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *Функция f голоморфна.*

(2) *Для всякого $z \in U$ существует предел*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

(этот предел, естественно, обозначается $f'(z)$ и называется производной функции f в точке z).

(3) *Если обозначить $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(z) = \operatorname{Im} f(z)$, то на U выполнены тождества*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(эти равенства называются «уравнениями Коши–Римана»).

(3′) *На U выполнено тождество $\partial f/\partial x + i\partial f/\partial y = 0$.*

(4) *Имеет место равенство $df = \varphi dz$, где $\varphi\colon U \to \mathbb{C}$ — некоторая функция на U.*

(5) *Дифференциальная форма $f dz$ замкнута на U.*

Кроме того, если f голоморфна, то функция φ из пункта (4) совпадает с f'.

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2): условие (2), очевидно, равносильно тому, что для всякой $z \in U$ существует такое число $\lambda \in \mathbb{C}$, что $f(z+h) = f(z) + \lambda h + o(|h|)$, а это, в свою очередь, равносильно тому, что производная $(Df)_z \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ представляет собой умножение на комплексное число λ, то есть является $\mathbb{C}$-гомоморфизмом из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$.

(1) $\Leftrightarrow$ (3): условие (3) равносильно тому, что матрица Якоби функции f относительно координат (x, y) является матрицей умножения на некоторое комплексное число, а это и есть условие (1).

(3) $\Leftrightarrow$ (3′): это очевидно.

(3′) $\Leftrightarrow$ (4): так как $dx = (1/2)(dz + d\overline{z})$, $dy = (1/2i)(dz - d\overline{z})$, имеем

$$\begin{aligned} df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(dz + d\overline{z}) + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}(dz - d\overline{z}) = \\ = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)dz + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)d\overline{z}. \end{aligned}$$

Поскольку дифференциальные формы dz и $d\overline{z}$ линейно независимы (над $\mathbb{C}$) в каждой точке U, условие (4) равносильно тому, что $\partial f/\partial x + i\partial f/\partial y = 0$, то есть условию (3′).

Дифференциальные операторы («комплексные векторные поля») $(1/2)(\partial f/\partial x - i\partial f/\partial y)$ и $(1/2)(\partial f/\partial x + i\partial f/\partial y)$ обозначаются $\partial/\partial z$ и $\partial/\partial\overline{z}$ соответственно (эти векторные поля образуют в комплексификации касательного пространства базис, дуальный к базису $\langle dz, d\overline{z}\rangle$ в пространстве комплексных дифференциальных форм); проведенное нами вычисление показывает, что для всякой гладкой функции f выполнено равенство

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}, \tag{1.2}$$

а уравнения Коши–Римана можно записать в форме $\partial f/\partial\overline{z} = 0$.

(3′) $\Leftrightarrow$ (5): имеем

$$d(f\,dz) = df \wedge dz = \Big(\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}\Big) \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z} \wedge dz = 2i\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}dx \wedge dy,$$

откуда все очевидно.

Остается доказать равенство $df = f'dz$ для голоморфной f. Поскольку, очевидно, $f' = \partial f/\partial x$, имеем, ввиду равенства $\partial f/\partial x = -i\partial f/\partial y$,

$$f'dz = \frac{\partial f}{\partial x}dz = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)dz = \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

и все следует из (3′) и формулы (1.2). $\square$

Из пункта (4) доказанного предложения немедленно вытекает

Следствие 1.4. *Пусть f — голоморфная функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$ и γ — кусочно гладкая кривая в U, соединяющая точки a и b (более формально: γ — кусочно гладкая 1-цепь, причем $\partial\gamma = b - a$). Тогда $\int_\gamma f'(z)dz = f(b) - f(a)$.* □

Если f — голоморфная функция, то интеграл $\int_\gamma f(z)dz$ принято называть попросту *интегралом функции f по кривой γ*.

Предложение 1.5. *Пусть $[p;q] \subset \mathbb{R}$ — отрезок и $\gamma\colon [p;q] \to U$ — кусочно-гладкая кривая вида $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, где $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Тогда для всякой голоморфной функции $f\colon U \to \mathbb{C}$ имеем*

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leqslant \int_{[p,q]} |f(x(t) + iy(t))| \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt \leqslant M \cdot L(\gamma),$$

где $M = \sup_{z\in\gamma} |f(z)|$ и $L(\gamma)$ — длина кривой γ.

Доказательство. Очевидно ввиду равенства $\gamma^* dz = (x'(t) + iy'(t))dt$. □

Примеры голоморфных функций. Из пункта (2) доказанного предложения с очевидностью следует, что всякий многочлен является голоморфной функцией на всем $\mathbb{C}$, причем его производная вычисляется по обычной формуле; это же верно и для многочленов от нескольких переменных. Функция $z \mapsto e^z$ также, как легко проверить с помощью пункта (2) предложения 1.3, будет голоморфна, причем верна привычная формула $(e^z)' = e^z$ (можно также подождать до следующей лекции, из результатов которой эти утверждения следуют с очевидностью); функции синус и косинус также будут голоморфны на всем $\mathbb{C}$, и выполнены привычные формулы для их производных. Без труда проверяется, что сумма, произведение и частное двух голоморфных функций будут голоморфны (последнее — там, где знаменатель не обращается в нуль) и что формулы для производной суммы, произведения и частного остаются верными и в комплексном случае. Наконец, очевидно, что композиция голоморфных функций голоморфна, причем остается верной формула для производной сложной функции.

Предложение 1.6. *Пусть f — голоморфная функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$. Если в точке $a \in U$ имеем $f'(a) \neq 0$, то существует такая окрестность $U' \ni a$, что f взаимно однозначна на U', множество $f(U')$ открыто в $\mathbb{C}$ и обратная функция $f^{-1}\colon U' \to U$ голоморфна на U'.*

Доказательство. Утверждения о существовании окрестности U', взаимной однозначности f на U' и открытости $f(U')$ следуют из «теоремы об обратной функции» вещественного анализа, поскольку $f\colon U \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ — гладкая (класса C^1) функция, якобиан которой в точке a отличен от нуля. Утверждение о голоморфности f^{-1} следует прямо из определения голоморфности: если $\mathbb{R}$-гомоморфизм комплексных векторных пространств $\mathbb{C}$-линеен и обратим, то обратный к нему гомоморфизм также $\mathbb{C}$-линеен. $\square$

Поскольку отображения $z \mapsto e^z$ и $z \mapsto z^n$ являются накрытиями $\mathbb{C}$ над $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ и $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ над $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ соответственно, на всяком *односвязном* открытом множестве $U \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ определены непрерывные функции, обратные к e^z и z^n ($n \in \mathbb{N}$). Так как производная функции $z \mapsto e^z$ отлична от нуля вообще всюду, а производная функции $z \mapsto z^n$ отлична от нуля всюду на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, из предложения 1.6 следует, что эти функции голоморфны. Функции, обратные к e^z и z^n, обозначаются $\ln z$ и $\sqrt[n]{z}$ соответственно; они определены не однозначно, а с точностью до прибавления константы вида $2\pi i n$, где $n \in \mathbb{Z}$ (в случае логарифма) или с точностью до умножения на константу $e^{2\pi i k/n}$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $0 \leqslant k < n$ (в случае корня); выбрать «арифметическое занчение корня», годное для всей комплексной плоскости, или же пригодное на всем $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ значение логарифма невозможно. Когда выбрана какая-то (одна из существующих на данном открытом множестве) обратная функция к экспоненте или степенной функции, говорят еще о выборе «ветви» логарифма или корня соответственно.

Будем называть *областью с гладкой границей* компактное подмножество $D \subset \mathbb{C}$, являющееся подмногообразием с краем в $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$; край этого многообразия (совокупность гладких кривых) будем называть *границей* области D и обозначать ∂D; дополнение к краю (внутренность D) будем обозначать $\operatorname{int} D$. Всюду в дальнейшем мы будем считать, что комплексная плоскость $\mathbb{C}$ (а стало быть, и все ее открытые подмножества) снабжена ориентацией, относительно которой дифференциальная форма $dx \wedge dy$ положительна (равносильно, но менее формально: базис $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$, состоящий из чисел 1 и i, взятых в указанном порядке, положительно ориентирван); при рассмотрении областей с гладкой границей мы будем считать, что область снабжена указанной ориентацией, а граница — индуцированной ориентацией (напомним, что в данном случае это означает следующее: касательный вектор к границе положительно ориентирован, если базис, в котором этот вектор идет первым, а вектор, направленный внутрь области, — вторым, положительно ориентирован).

Предложение 1.7 (теорема Коши). *Если $D \subset \mathbb{C}$ — область с гладкой границей и f — функция, голоморфная в окрестности D, то $\int_{\partial D} f\,dz = 0$.*

Если $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция и σ — гладкая 2-цепь в U, то $\int_{\partial\sigma} f\,dz = 0$.

Доказательство. Оба утверждения немедленно следуют из формулы Стокса и пункта (5) предложения 1.3. □

Замечание 1.8. Первое утверждение теоремы Коши поддается разнообразным формальным усилениям. Например, достаточно считать, что f голоморфна на $\operatorname{int} D$ и непрерывна на D; можно также считать, что граница области D не обязательно гладкая, но кусочно-гладкая или даже всего лишь «спрямляемая». Мы не будем вдаваться в подробности, которые можно найти в любом достаточно полном учебнике комплексного анализа; в тех случаях, когда нам это будет нужно, слушатели без труда смогут внести соответствующие уточнения самостоятельно.