Лекция 10. Гиперболическая метрика

Цель этой заключительной лекции — выявить инвариантный смысл леммы Шварца. Начнем со следующей вариации на тему теоремы Римана об отображении.

Предложение-определение 10.1. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — односвязное открытое множество, отличное от самого $\mathbb{C}$, и $z \in U$. Тогда определено положительное число*

$$F_U(z) = \frac{1}{\max |f'(0)|},$$

где f пробегает множество таких голоморфных отображений $f\colon \Delta \to U$, что $f(0) = z$ (через $\Delta = \{z \mid |z| < 1\}$ обозначен единичный круг).

Число $F_U(z)$ называется плотностью гиперболической метрики (области U в точке z). Плотность гиперболической метрики обладает следующими свойствами:

1. *Если $\varphi\colon U \to U'$ — изоморфизм (здесь и ниже U' — другая односвязная область, отличная от $\mathbb{C}$), то для всякой точки $z \in U_1$ имеем $F_{U'}(\varphi(z)) = F_U(z)/|\varphi'(z)|$.*

2. *Если $\varphi\colon U \to U'$ — голоморфное отображение, то для всякой точки $z \in U_1$ имеем $F_{U'}(\varphi(z)) \cdot |\varphi'(z)| \leqslant F_U(z)$.*

Доказательство. Пусть $\psi\colon U \to \Delta$ — изоморфизм, переводящий точку $z \in U$ в 0 (какой-то изоморфизм существует по теореме Римана, а затем его можно скомпоновать с автоморфизмом круга Δ, переводящим образ точки z в нуль). Тогда по лемме Шварца $|(\psi \circ f)'(0)| \leqslant 1$, причем равенство достигается (когда $f = \psi^{-1}$). Отсюда $|f'(0)| \leqslant 1/|\psi'(z)|$, причем равенство достигается. Стало быть, число $F_U(z)$ определено и равно $|\psi'(z)|$. Из этого последнего равенства немедленно вытекает свойство (1). Поскольку, очевидно,

$$\max_{\substack{g\colon \Delta \to U' \\ g(0)=\varphi(z)}} |g'(0)| \geqslant |\varphi'(z)| \cdot \max_{\substack{f\colon \Delta \to U \\ f(0)=z}} |f'(0)|$$

(среди отображений из Δ в U', переводящих ноль в $\varphi(z)$, заведомо содержатся все отображения вида $\varphi \circ f$, где $f\colon \Delta \to U$ и $f(0) = z$), свойство (2) также доказано. □

Вычислим функцию F_U для единичного круга Δ. Ввиду сказанного выше $F_\Delta(a)$ равно модулю производной отображения $z \mapsto (z-a)/(1-\overline{a}z)$ в точке a; легко видеть, что это число равно $1/(1-|a|^2)$; стало быть, функция $F_\Delta\colon \Delta \to \mathbb{R}$ является гладкой; ввиду утверждения 10.1(1), то же верно и для функции $F_U\colon U \to \mathbb{R}$ для произвольной области U, изоморфной Δ.

Теперь переформулируем предложение 10.1 в более геометрических терминах. Именно, пусть область $U \subset \mathbb{C}$ — такая же, как выше; для $z \in U$ положим $z = x + iy$.

Определение 10.2. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — односвязное открытое множество, отличное от самого $\mathbb{C}$. *Гиперболической метрикой* на U называется риманова метрика, заданная формулой $ds^2 = (F_U(z))^2(dx^2 + dy^2)$.

Вместо $(dx^2 + dy^2)$ часто пишут просто $|dz|^2$ и, кроме того, из формулы для гиперболической метрики часто извлекают корень, записывая попросту $ds = F_U(z)|dz|$; в этих обозначениях длина кривой $\gamma\colon [a; b] \to U$ в гиперболической метрике равна $\int_a^b F_U(f(t))|f'(t)|dt$.

Предложение 10.3. *Пусть $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ — односвязные открытые множества, отличные от $\mathbb{C}$. Тогда:*

(1) *Если $\varphi\colon U_1 \to U_2$ — изоморфизм, то он является изометрией (в частности, гиперболическая метрика на U инвариантна относительно автоморфизмов области U).*

(2) *Если $\varphi\colon U_1 \to U_2$ — голоморфное отображение и v — касательный вектор к U_1 в точке $z \in U_1$, то длина вектора $(Df)_z(v)$ относительно гиперболической метрики на U_2 не превосходит длины вектора v относительно гиперболической метрики на U_1; если γ — кривая в области U_1, то длина кривой $f(\gamma)$ относительно гиперболической метрики на U_2 не превосходит длины кривой γ относительно гиперболической метрики на U_1 (короче говоря, голоморфные отображения не увеличивают расстояний в гиперболической метрике).*

Доказательство. Утверждения (1) и (2) суть непосредственные переформулировки утверждений с теми же номерами из 10.1 (утверждение про длины кривых получается интегрированием). $\square$

Нетрудно заметить, что гиперболическая метрика на единичном круге (или верхней полуплоскости) задает расстояние в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского. Выпишем гиперболическую метрику для единичного круга и верхней полуплоскости в явном виде (для круга мы это уже делали, для верхней полуплоскости формула получается прямым вычислением с использованием явного вида конформного отображения круга на полуплоскость):

$$\begin{aligned} &\Delta = \{z \mid |z| < 1\} \quad && H = \{z \mid \operatorname{Im}(z) > 0\} \\ &ds = \frac{|dz|}{1 - |z|^2} && ds = \frac{|dz|}{2\operatorname{Im}(z)}. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Отметим еще некоторые свойства гиперболической метрики. Во-первых, она «геодезически полна»; по определению это означает, что всякую геодезическую можно неограниченно продолжать. Это свойство непосредственно вытекает из простейших свойств геометрии Лобачевского (по самому определению, геодезические суть прямые в плоскости Лобачевского). Как известно («теорема Хопфа–Ринова»), геодезическая полнота риманова пространства равносильна тому, что оно является полным метрическим пространством относительно римановой метрики (впрочем, метрическая полнота плоскости Лобачевского хорошо известна и независимо от общих теорем).

Во-вторых, поскольку группа автоморфизмов действует на областях, изоморфных кругу, транзитивно, а гиперболическая метрика инвариантна относительно автоморфизмов, кривизна этой метрики постоянна. Прямое вычисление, которое мы опускаем, показывает, что она рана -4.

Замечательным фактом является то, что гиперболическую метрику можно определить не только на односвязных областях, отличных от $\mathbb{C}$, но и на многих других (в некотором смысле — на «почти всех») римановых поверхностях. Для этого определения нам понадобится следующее глубокое обобщение теоремы Римана, которое мы вынуждены оставить без доказательства:

Теорема 10.4 (Кёбе). *Всякая односвязная риманова поверхность изоморфна либо $\overline{\mathbb{C}}$, либо $\mathbb{C}$, либо Δ.* □

(А эти три римановы поверхности неизоморфны, но это уже тривиально: $\mathbb{C}$ и Δ неизоморфны ввиду теоремы Лиувилля, а $\overline{\mathbb{C}}$ им обеим даже не гомеоморфна.)

Поскольку универсальная накрывающая любой римановой поверхности односвязна по определению, можно расклассифицировать римановы поверхности по их универсальным накрывающим:

Предложение 10.5. *Пусть X — связная риманова поверхность и $\widetilde{X}$ — ее универсальная накрывающая. Тогда:*

(1) *$\widetilde{X}$ изоморфна $\overline{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда X изоморфна $\overline{\mathbb{C}}$.*

(2) *$\widetilde{X}$ изоморфна $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда X изоморфна $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ или некоторой эллиптической кривой.*

(3) *Во всех остальных случаях $\widetilde{X}$ изоморфна единичному кругу.*

Доказательство. Положим $G = \pi_1(X)$. Тогда, как известно, G действует на $\widetilde{X}$ как группа гомеоморфизмов, причем легко видеть, что в нашем случае эти гомеоморфизмы будут к тому же голоморфными автоморфизмами. При этом действие G на $\widetilde{X}$ является «свободным и дискретным»: для всякой точки $x \in \widetilde{X}$ существует такая окрестность $U \ni x$, что $\gamma U \cap U = \varnothing$ при $\gamma \in G \setminus \{1\}$ (в частности, неединичные элементы группы G действуют без неподвижных точек). Наконец, X гомеоморфно (и изоморфно) $\widetilde{X}/G$.

Посмотрим теперь, какие группы автоморфизмов могут свободно и дискретно действовать на $\overline{\mathbb{C}}$ или $\mathbb{C}$.

Всякий автоморфизм сферы Римана имеет вид $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$: в самом деле, всякое голоморфное отображение из $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$ задается, как мы помним из предложения 5.7, рациональной функцией, а коль скоро это отображение — изоморфизм, то есть имеет степень 1, то и степени числителя и знаменателя не могут быть больше единицы. Стало быть, *любой* автоморфизм сферы Римана имеет неподвижную точку, так что дискретная и свободная группа автоморфизмов сферы Римана может состоять только из единичного элемента; тем самым доказано утверждение (1).

Всякий автоморфизм $\mathbb{C}$ имеет вид $z \mapsto az+b$ (предложение 4.17); если $a \neq 1$, то такой автоморфизм обязательно имеет неподвижную точку и тем самым лежать в группе G не может; теперь легко видеть, что всякая дискретная группа, состоящая из автоморфизмов вида $z \mapsto z+b$, либо тривиальна, либо состоит из автоморфизмов вида $z \mapsto z+nb$, где b фиксировано и $n \in \mathbb{Z}$, либо состоит из автоморфизмов вида $z \mapsto z+u$, где u пробегает некоторую решетку. Риманова поверхность $\mathbb{C}/G$ при этом будет изоморфна соответственно $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ будет иметь вид $z \mapsto e^{2\pi iz/b}$) или эллиптической кривой.

Стало быть, те немногие случаи, когда универсальная накрывающая изоморфна $\overline{\mathbb{C}}$ или $\mathbb{C}$, перечислены, и предложение доказано. $\square$

Замечание 10.6. Группы автоморфизмов, дискретно и свободно действующие на единичном круге, также подробно изучены.

Определение 10.7. Риманова поверхность, универсальная накрывающая которой изоморфна единичному кругу (или, эквивалентно: любая риманова поверхность, кроме $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и эллиптических кривых) называется *гиперболической*.

Отметим, в частности, что гиперболической будет любая компактная риманова поверхность, род которой больше единицы.

Итак, все римановы поверхности, кроме небольшого списка, гиперболичны. Покажем, что на всех гиперболических римановых поверхностях определена гиперболическая метрика.

Предложение-определение 10.8. *На всякой гиперболической римановой поверхности существует канонически определенная риманова метрика, называемая гиперболической метрикой и обладающая следующими свойствами:*

(1) *Всякий изоморфизм гиперболических римановых поверхностей является изометрией.*

(2) *Если $f\colon X_1 \to X_2$ — голоморфное отображение гиперболических римановых поверхностей, $x \in X_1$ и $v \in \mathcal{T}_x X_1$, то длина вектора $(Df)_x(v) \in \mathcal{T}_{f(x)} X_2$ не превосходит длины вектора v; отображение f не увеличивает расстояния и длины кривых.*

(3) *Гиперболическая метрика геодезически полна и имеет постоянную кривизну, равную -4.*

Доказательство. Представим X в виде Δ/G, где G — дискретная и свободная группа автоморфизмов; поскольку G действует на Δ изометриями, метрика на Δ опускается на Δ/G; полученную метрику будем называть гиперболической метрикой на X. Чтобы доказать утверждение (2) (из которого следует (1)), поднимем f до отображения универсальных накрывающих:

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\tilde f} & \Delta \\ {\scriptstyle \pi_1}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \pi_2}\Big\downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{f} & X_2. \end{array}$$

Поскольку по построению проекции π_1 и π_2 являются локальными изометриями, утверждение о длинах векторов следует из предложения 10.3(2) (то есть, в конечном счете, из леммы Шварца), а оставшаяся часть утверждения (2) получается отсюда интегрированием. Наконец, утверждение (3) следует из аналогичного утверждения про гиперболическую метрику на Δ и локальной изометричности проекции $\Delta \to \Delta/G$ (поскольку кривизна и геодезическая полнота определяются локально). $\square$

Мы применим гиперболическую метрику к доказательству следующего красивого утверждения, называемого «большой теоремой Пикара»:

Теорема 10.9. *В окрестности существенно особой точки голоморфная функция принимает все значения, кроме, быть может, одного.*

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Не ограничивая общности, можно считать, что нам дана функция f, голоморфная в проколотом диске $\Delta^* = \{z \mid 0 < |z| < 1\}$ и не принимающая значений 0 и 1. Предположим, что f имеет в нуле существенную особенность, и выведем отсюда противоречие.

Зафиксируем комплексное число $c \neq 0, 1$. По теореме Сохоцкого существует такая последовательность комплексных чисел $z_n \in \Delta^*$, что $\lim z_n = 0$ и $\lim f(z_n) = c$. Обозначим через γ_n окружность с центром в нуле и радиусом $|z_n|$.

Лемма 10.10. *Длины окружностей γ_n в гиперболической метрике области Δ^* стремятся к нулю при $n \to \infty$.*

Доказательство леммы. Отображение $z \mapsto e^{iz}$ является универсальным накрытием верхней полуплоскости над Δ^*. Окружность радиуса r с центром в нуле является взаимно однозначным (за исключением концов) образом отрезка, соединяющего точки $i\ln(1/r)$ и $2\pi + i\ln(1/r)$; стало быть, длина окружности в гиперболической метрике на Δ^* равна длине этого отрезка в гиперболической метрике на верхней полуплоскости. Из формулы (10.1) сразу видно, что эта последняя длина равна $\pi/\ln(1/r)$, что стремится к нулю при $r \to 0$. $\square$

Рассмотрим теперь f как голоморфное отображение из Δ^* в $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Поскольку $\mathbb{C}\setminus\{0, 1\}$ является гиперболической римановой поверхностью (например, потому, что функция k^2, как мы отмечали в лекции 9, представляет верхнюю полуплоскость в виде накрытия над $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$), из предложения 10.8 и леммы следует, что длины кривых $f(\gamma_n)$ в гиперболической метрике на $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ стремятся к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, для всякой окрестности $U \ni c$ существует такое $N > 0$, что $f(\gamma_n) \subset U$ при $n > N$. Выберем U такой, чтобы она содержалась в круге радиуса R с центром в нуле (относительно обычной евклидовой метрики). Тогда получаем, что $|f(z)| \leqslant R$ при $n > N$ и $|z| = |z_n|$; применяя принцип максимума модуля к кольцам, заключенным между окружностями радиуса $|z_n|$ и $|z_{n+1}|$, получаем, что $|f(z)| \leqslant R$ для всех z, достаточно близких к нулю. Стало быть, по теореме Римана особенность функции f в нуле устранима — противоречие! $\square$