Лекция 3. Локальные свойства голоморфных функций

Определение 3.1. *Нулем* голоморфной функции называется точка, в которой эта функция обращается в нуль.

Предложение-определение 3.2. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Предположим, что $f(a) = 0$, где $a \in U$, но при этом f не является тождественным нулем ни в какой окрестности точки a. Пусть k — целое положительное число. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$, *но* $f^{(k)}(a) \neq 0$.

(1′) *В разложении функции f в степенной ряд $f = \sum c_i(z-a)^i$ имеем $c_0 = \dots = c_{k-1} = 0$, но $c_k \neq 0$.*

(2) *Существует такая голоморфная на U функция g, что $g(a) \neq 0$ и на U выполнено тождество $f(z) = (z-a)^k g(z)$.*

(3) *В некоторой окрестности $U' \ni a$ определена такая голоморфная функция h, что $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$, и $f(z) = h(z)^k$ всюду на U'.*

Число k, удовлетворяющее этим условиям, всегда существует и называется кратностью *нуля a функции f. Если $f(a) \neq 0$, то говорят, что кратность нуля функции f в точке a равна нулю.*

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (1′): это следует из формулы $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ (см. замечание 2.11).

Существование числа k, удовлетворяющего условию (1′): это следует из замечания 2.12.

(1′) $\Rightarrow$ (2): степенной ряд для f в окрестности точки a имеет вид

$$f(z) = c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots = (z-a)^k(c_k + c_{k+1}(z-a) + \dots),$$

причем ряд в скобках, очевидно, абсолютно сходится в некоторой окрестности $U' \ni a$. Определим функцию g на U' по формуле $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{k+n}(z-a)^n$, а на $U \setminus \{a\}$ — по формуле $g(z) = f(z)/(z-a)^k$; ясно, что на $U' \setminus \{a\}$ эти определения согласуются и что $g(a) = c_k \neq 0$, так что искомая голоморфная функция построена.

(2) $\Rightarrow$ (3): поскольку $g(a) \neq 0$, существует окрестность $U' \ni a$, вкоторой функция g не обращается в нуль; уменьшая, если нужно, U', можно считать, что $g(U')$ содержится в односвязном открытом подмножестве в $U'' \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда, как мы видели в лекции 1, на U'' существует голоморфная функция $z \mapsto \sqrt[k]{z}$ («ветвь корня k-й степени»), обратная к возведению в степень k; значит, можно взять композицию этой функции

с функцией g (ограниченной на U') и получить определенную на U' голоморфную функцию $z \mapsto \sqrt[k]{g(z)}$. Положим теперь $h(z) = (z-a)\sqrt[k]{g(z)}$ для $z \in U'$. Тождество $(h(z))^k = f(z)$ очевидно, а неравенство $h'(z) \neq 0$ следует из формулы для производной произведения и того факта, что производная функции $z \mapsto \sqrt[k]{g(z)}$ отлична от нуля в точке a, поскольку не равны нулю как производная функции g в точке a, так и производная корня k-й степени в точке $g(a)$.

(3) $\Rightarrow$ ($1'$): ввиду доказанной эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ ($1'$) разложение функции h в окрестности точки a имеет вид $b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \dots$, причем $b_1 \neq 0$. Возводя это разложение в степень k (что законно ввиду абсолютной сходимости) и приводя подобные, получим разложение для функции f, начинающееся с $b_1^k(z-a)^k$, с ненулевым коэффициентом при $(z-a)^k$. □

Следствие 3.3. *Пусть $a \in U$ — нуль функции f, голоморфной в $U \subset \mathbb{C}$. Тогда либо f тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки a, либо в некоторой окрестности точки a у функции f нет других нулей, кроме a.* □

Замечание 3.4. Следствие 3.3 специфично для функций одного переменного. Как показывают простейшие примеры (скажем, функция двух переменных $f(z,w) = z$), голоморфные функции нескольких переменных могут иметь неизолированные нули. Более того, можно показать (это уже несколько труднее), что голоморфная функция более чем одного комплексного переменного *вообще никогда* не может иметь изолированный нуль.

Теперь мы можем вывести обещанный на прошлой лекции «усиленный принцип аналитического продолжения»:

Предложение 3.5. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — связное открытое подмножество и $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфные функции. Если f и g совпадают на множестве, имеющем предельную точку в U, то $f(z) = g(z)$ для всех $z \in U$.*

Доказательство. Голоморфная функция $h = f - g$ имеет, очевидно, неизолированный нуль в U. Чтобы доказать, что h есть тождественный нуль, нам достаточно, ввиду связности U, убедиться в том, что и множество неизолированных нулей функции h открыто и замкнуто в U. Замкнутость этого множества очевидна (множество предельных точек *любого* подмножества метрического пространства будет замкнуто), а открытость вытекает из предложения 3.3: если a — неизолированный нуль функции h, то эта функция есть тождественный нуль на некоторой окрестности точки a, и любая точка этой окрестности также будет неизолированным нулем. □

Разумеется, для функций более чем одного переменного это следствие также неверно, как показывают очевидные примеры.

Тепрь изучим следующую ситуацию. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, $a \in U$ и f — функция, голоморфная на множестве $U \setminus \{a\}$. Спрашивается, как ведет себя $f(z)$ при $z \to a$? (Традиционное название для этого вопроса — «исследование изолированных особенностей голоморфных функций».) Поскольку вопрос локален, можно считать, что U — открытый диск, а точка a — его центр. Нам опять помогут степеннные ряды, но на сей раз они будут включать и отрицательные степени.

Предложение 3.6. *Пусть $r < R$ — неотрицательные числа (мы не исключаем случаев $r = 0$ или $R = +\infty$); положим $U = \{\, z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R \,\}$. Если $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, то всюду на U имеет место разложение*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{3.1}$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компактном множестве $K \subset U$, а его коэффициенты вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)(z-a)^{-n-1}\, dz, \tag{3.2}$$

где γ — любая лежащая в U положительно (то есть против часовой стрелки) ориентированная окружность с центром в a.

Доказательство. Выберем числа r' и R' таким образом, чтобы $r < r' < R' < R$, и обозначим через γ и Γ окружности с радиусами r' и R' соответственно (положительно ориентированнные), а через D — область с границей $\{\, z \in \mathbb{C} \mid r' \leqslant |z| \leqslant R' \,\} \subset U$. Для всякого $z \in \operatorname{int} U$ имеем, ввиду формулы Коши,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{z - \zeta}}_{I_2} \tag{3.3}$$

(мы сменили знак во втором интеграле, так как индуцированные ориентации внешней и внутренней окружностей противоположны). Первый из двух интегралов в (3.3) мы преобразуем точно так же, как в доказательстве теоремы 2.10, когда мы разлагали функцию, голоморфную в диске, в ряд Тейлора; не повторяя этих выкладок, запишем ответ:

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где значения коэффициентов c_n задаются формулой (3.2) (ввиду теоремы Коши интегралы по Γ и γ совпадают!) и ряд абсолютно и равномерно сходится на любом компакте, содержащемся в открытом диске с центром a и радиусом R. Преобразования, необходимые для разложения в ряд слагаемого I_2, аналогичны:

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}} = \sum_{n=-1}^{-\infty} (z-a)^n (\zeta-a)^{-n-1},$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, содержащемся в дополнении к замкнутому диску с центром a и радиусом r'. Умножая на $f(\zeta)\,d\zeta$ (что не нарушит равномерности) и почленно интегрируя по γ, получаем, что

$$I_2 = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n,$$

где сходимость абсолютна и равномерна на указанных выше множествах и коэффициенты c_n задаются формулой (3.2). Складывая I_1 и I_2, получаем все, что нужно (равномерная сходимость на компактах в U следует из произвольности выбора r' и R' и независимости интегралов по γ от радиуса окружности γ). $\square$

Определение 3.7. Ряд (3.1) называется *рядом Лорана* функции f; совокупность членов ряда Лорана с отрицательными степенями $z-a$ называется его *главной частью* (а совокупность всех остальных членов называется *правильной частью* ряда Лорана).

Подобно ряду Тейлора, ряд Лорана однозначно определяется по функции:

Предложение 3.8. *Если в условиях предложения 3.6 имеет место разложение*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{3.4}$$

где ряд равномерно сходится на компактах в U, то коэффициенты c_n вычисляются по формулам (3.2).

Доказательство. Легко видеть, что $\int_\gamma (z-a)^n\,dz$ равен $2\pi i$ при $n=-1$ и нулю при $n \neq -1$. Умножая разложение (3.4) на $(z-a)^{-n-1}$ и почленно интегрируя по γ (что возможно ввиду равномерной сходимости), получаем, ввиду предыдущего замечания, что $2\pi i c_n = \int_\gamma f(z)(z-a)^{-n-1}\,dz$, что и требовалось. $\square$

Теперь, вооружившись рядами Лорана, мы можем исследовать поведение голоморфной функции в окрестности изолированной особой точки; оказывается, что оно далеко не произвольно:

Теорема 3.9. *Пусть* $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ *и* $\Delta = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r \,\}$, *и пусть* f *— функция, голоморфная в* $\Delta^* = \Delta \setminus \{a\}$. *Тогда имеет место одна и только одна из следующих возможностей:*

(1) *Функция* f *ограничена в некоторой проколотой окрестности точки* a; *в этом случае* f *продолжается до функции, голоморфной во всем* Δ, *и ее ряд Лорана не содержит членов с* $z-a$ *в отрицательных степенях.*

(2) *Функция* f *не является ограниченной ни в какой проколотой окрестности точки* a, *но при этом для некоторого* $N > 0$ *выполнено соотношение* $|f(z)| = O(|z-a|^{-N})$ *при* $z \to a$; *в этом случае существуют такие целое число* $k > 0$ *и голоморфная во всем* Δ *функция* g, *что* $f(z) = g(z)/(z-a)^k$ *всюду на* Δ^* *и* $g(a) \neq 0$; *при этом* $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$, *а ряд Лорана функции* f *имеет вид* $\sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z-a)^n$, *и* $c_{-k} \neq 0$.

(3) $\lim_{z\to a} |f(z)|$ *не существует (в том числе не равен* $+\infty$*); в этом случае для всякого* $b \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *существует такая последовательность комплексных чисел* $\{z_n\}$, *что* $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ *и* $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = b$ *(если* $b = \infty$, *то имеется в виду, что* $\lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = +\infty$*); при этом ряд Лорана функции* f *содержит ненулевые члены с* $(z-a)^{-n}$ *для сколь угодно больших* $n \in \mathbb{N}$.

Определение 3.10. Если в условиях теоремы 3.9 выполнена альтернатива (1), говорят, что функция f имеет в точке a *устранимую особенность*; если выполнена альтернатива (2), говорят, что f имеет в точке a *полюс порядка* k; если выполнена альтернатива (3), говорят, что f имеет в точке a *существенную особенность*.

Доказательство теоремы 3.9. Пусть f ограничена в проколотой окрестности точки a; уменьшив, если нужно, радиус диска Δ, можно считать, что существует такое число $M > 0$, что $|f(z)| \leqslant M$ на всем Δ^*. Пусть n — целое положительное число; вычислим коэффициент c_{-n} ряда Лорана функции f по формуле (3.2), беря в качестве γ окружность с центром a и радиусом $\varepsilon > 0$, и оценим этот коэффициент с помощью предложения 1.5:

$$|c_{-n}| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma f(\zeta)(\zeta - z)^{n-1}\,d\zeta\right| \leqslant \frac{M\varepsilon^{n-1}}{2\pi}\cdot 2\pi\varepsilon = M\varepsilon^n.$$

Устремляя ε к нулю, получаем, что $c_{-n} = 0$; значит, ряд Лорана для функции f имеет вид $\sum_{n\geqslant 0} c_n (z-a)^n$ и тем самым определяет функцию, голоморфную во всем Δ, являющуюся искомым продолжением функции f. Итак, мы доказали, что из ограниченности f в проколотой окрестности точки a вытекает, что выполнена альтернатива (1).

Предположим теперь, что $|f(z)| = O(|z-a|^{-N})$ при $z \to a$, и при этом f не является ограниченной ни в какой проколотой окрестности точки a; покажем, что в этом случае выполнена альтернатива (2). Не ограничивая общности, можно считать, что $N \in \mathbb{N}$. Рассмотрим теперь функцию $\tilde{g}(z) = (z-a)^N f(z)$; по условию она ограничена в проколотой окрестности точки a и, следовательно, в силу того, что мы уже доказали, продолжается до голоморфной функции на всем Δ (мы будем по-прежнему обозначать эту функцию через $\tilde{g}$). Если обозначить через m порядок нуля функции $\tilde{g}$ в точке a и положить $g(z) = \tilde{g}(z)/(z-a)^m$, то функция g голоморфна во всем Δ и $g(a) \neq 0$ (см. предложение 3.2), и очевидно, что $N > m$ (в противном случае функция $f(z) = g(z)/(z-a)^{N-m}$ будет ограничена в окрестности a). Полагая $k = N - m$, получаем, что $f(z) = g(z)/(z-a)^k$; поскольку $g(a) \neq 0$, отсюда следует, что $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$; утверждение про ряд Лорана функции f следует из того, что он получается из разложения функции g делением на $(z-a)^k$.

Пусть, наконец, $\lim_{z\to a} |f(z)|$ не существует (даже как $+\infty$); тогда ряд Лорана содержит бесконечно много ненулевых членов с отрицательными степенями (иначе выполнялось бы равенство $f(z) = g(z)/(z-a)^k$, где g голоморфна в Δ и $g(a) \neq 0$, и $\lim_{z\to a} |f(z)|$ равнялся бы $+\infty$), так что для завершения доказательства теоремы остается только установить, что всякое $b \in \mathbb{C}$ можно представить в виде $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$, где $z_n \to a$ (что делать в случае $b = \infty$, продумайте самостоятельно). Рассуждая от противного, предположим, что для некоторого $b \in \mathbb{C}$ это не так; тогда функция $h(z) = 1/(f(z) - b)$ голоморфна и ограничена в некотором проколотом диске Δ'^* меньшего радиуса и, стало быть, продолжается до функции, голоморфной во всем Δ'. Поскольку на Δ'^* имеем $f(z) = b + (1/h(z))$, получаем, что либо f ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a (если $h(a) \neq 0$), либо $\lim_{z\to a} |f(z)| = +\infty$ (если $h(a) = 0$); в любом случае получается противоречие. $\square$

Отдельные утверждения теоремы 3.9 имеют свои имена. Так, утверждение о том, что голоморфная функция, ограниченная в проколотой окрестности точки, голоморфно продолжается в эту точку, называется теоремой Римана о продолжении (или об устранимой особенности); утверждение о предельных точках значений функции в окрестности существенной особенности называется в различных текстах теоремой Вейерштрасса, теоремой Казорати или теоремой Сохоцкого. Теорему В.–К.–С. можно значительно усилить: оказывается, что в любой проколотой окрестности существенной особенности голоморфная функция бесконечное число раз принимает все значения, кроме, быть может, одного («большая теорема Пикара»), но для доказательства этого утверждения нужна более сложная техника.