Лекция 4. Локальный анализ: приложения

Цель этой лекции — вывести различные более или менее конкретные следствия из полученных прошлый раз общих результатов о локальном поведении голоморфных функций.

Определение 4.1. Функция, голоморфная на всем $\mathbb{C}$, называется *целой функцией.*

Ясно, что целые функции задаются степенными рядами с бесконечным радиусом сходимости.

Предложение 4.2. *Пусть $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — целая функция, обладающая свойством $|f(z)| = O(|z|^N)$ при $|z| \to \infty$ для некоторого $N > 0$. Тогда f — монгочлен степени, не превосходящей N.*

Следствие 4.3 (теорема Лиувилля). *Целая функция, ограниченная на всем $\mathbb{C}$, является константой.* $\square$

Доказательство. Положим $g(z) = f(1/z)$; тогда ряд Лорана для g в (проколотой) окрестности нуля — это ряд Тейлора для f, в котором z заменено на $1/z$. Из условия следует, что для функции g в окрестности нуля имеет место альтернатива (2) из теоремы 3.9, так что ее ряд Лорана может содержать ненулевые члены с z^n, где $n < 0$, только при $n \geqslant -N$, а ряд Тейлора функции f, соответственно, содержит только члены степеней $\leqslant N$. $\square$

Следствие 4.4 (из доказательства). *Если целая функция f такова, что функция $g(z) \mapsto f(1/z)$ не имеет в нуле существенной особенности, то f — многочлен.* $\square$

Следующее следствие из нашего локального анализа называется «принцип сохранения области».

Предложение 4.5. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое подмножество, $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция и $a \in U$. Если функция f не является константой в некоторой окрестности точки z, то точка $f(a)$ является внутренней точкой множества $f(U)$.*

Следствие 4.6. *Если функция f голоморфна на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$ и не является констанотой ни на одной его связной компоненте, то отображение $f\colon U \to \mathbb{C}$ является открытым (т. е. переводит открытые множества в открытые).* $\square$

Доказательство. Если $f'(a) \neq 0$, то все очевидно ввиду теоремы об обратной функции. Пусть $f'(a) = 0$, положим $f(a) = b$, и пусть k — кратность нуля функции $z \mapsto f(z) - b$ в точке a. Виду пункта (3) предложения 3.2 получаем, что в некоторой окрестности $U' \ni a$ функция f

представляется в виде $f(z) = b + (h(z))^k$, где функция h голоморфна и $h'(a) \neq 0$. Ввиду сказанного выше точка $h(a)$ является внутренней точкой множества $h(U')$; с другой стороны, тривиально проверяется, что отображение $w \mapsto w^k + a$ открыто (в том числе и в окрестности нуля), так что точка $f(a) = b + (h(a))^k$ является внутренней точкой множества $f(U')$, и тем более — большего множества $f(U)$. $\square$

Замечание 4.7. Для голоморфных функций нескольких комплексных переменных $f\colon U \to \mathbb{C}$, где U открыто в $\mathbb{C}^n$, предложение 4.5 также верно (и без труда выводится из того, что мы доказали для функций одного переменного). С другой стороны, для голоморфных отображений $f\colon U \to \mathbb{C}^n$, где U открыто в $\mathbb{C}^n$, предложение 4.5 и его следствие *совершенно неверны*: например, отображение $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, заданное формулой $(z, w) \mapsto (z, zw)$ не является открытым в начале координат.

Определение 4.8. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, $a \in U$ и $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, не являющаяся константой в окрестности a. Точка a называется *точкой ветвления* функции f, если $f'(a) = 0$. Наименьшее целое k, для которого $f^{(k)}(a) \neq 0$ (или, что тоже самое, кратность нуля a у функции $z \mapsto f(z) - f(a)$), называется *индексом ветвления* функции f в точке a. Если f не имеет в U точек ветвления (и не является константой ни на одной из связных компонент U), то отображение $f\colon U \to \mathbb{C}$ называется *неразветвленным* на U (так что, согласно этому определению, отображение неразветвлено в точке a тогда и только тогда, когда его индекс ветвления равен 1).

Замечание 4.9. Введенная выше терминология стандартна в алгебраической геометрии; в классическом комплексном анализе ветвлением называется несколько иное явление.

Предложение 4.10. *Пусть U — открытое множество, и пусть $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная и взаимно однозначная (т. е. не склеивающая различные точки) функция. Тогда обратная функция $f^{-1}\colon f(U) \to U$ голоморфна.*

Доказательство. Открытость множества $f(U)$ следует из предложения 4.5; следовательно, ввиду теоремы об обратной функции, надо только проверить, что f неразветвлена на U. Рассуждая от противного, предположим, что f разветвлена в точке $a \in U$ с индексом $k \geqslant 2$. Как и в доказательстве предложения 4.5, найдем такие окрестность $U' \ni a$ и голоморную функцию $h\colon U' \to \mathbb{C}$, что $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$ и при $z \in U'$ выполнено тождество $f(z) = f(a) + (h(z))^k$; уменьшив при необходимости U', можно считать, что h взаимно однозначна на U'. Тогда ограничение функции f на U' представляется в виде композиции отображений $z \mapsto h(z)$, $w \mapsto w^k$ и $u \mapsto u + f(a)$. Поскольку первое из этих отображений взаимно однозначно, а второе при $k \geqslant 2$ не является взаимно однозначным ни в какой окрестности точки $h(a) = 0$, получаем, что отображение f не является взаимно однозначным даже на U' — противоречие. $\square$

Доказанное предложение контрастирует с тем, что имеет место для (сколь угодно гладких, пусть даже вещественно-аналитических) функций действительного переменного: отображение $x \mapsto x^3$ гладко и взаимно однозначно, но обратное к нему отображение не является гладким в нуле.

Определение 4.11. Пусть $U_1, U_2 \subset \mathbb{C}$ — открытые множества. Отображение $f\colon U_1 \to U_2$ называется *конформным,* если оно биективно, голоморфно, и если обратное отображение $F^{-1}\colon U_2 \to U_1$ также голоморфно (последнее условие, в силу предложения 4.10, следует из двух предыдущих). Открытые подмножества, между которыми существует конформное отобаржение, называются *конформно изоморфными* (или просто изоморфными).

Примеры 4.12. Отображение $z \mapsto i(1-z)/(1+z)$ задает конформный изоморфизм единичного круга $\Delta = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \,\}$ на верхнюю полуплоскость $H = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \,\}$. Для всяких $\theta \in \mathbb{R}$ и $a \in \Delta$ отображение $z \mapsto e^{i\theta}(z-a)/(1-\overline{a}z)$ является конформным автоморфизмом круга Δ; для всякой матрицы $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{R})$ отображение $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ является автоморфизмом верхней полуплоскости H; вскоре мы увидим, что других автоморфизмов у этих областей и нет.

Из теоремы Лиувилля (следствие 4.3) немедленно следует, что $\mathbb{C}$ и Δ конформно неизоморфны. Впрочем, для односвязных областей такой эффект — скорее исключение, чем правило: «теорема Римана об отображении», которую мы докажем позже в нашем курсе, утверждает, что любые два односвязных открытых подмножества в $\mathbb{C}$, отличных от самого $\mathbb{C}$, будут конформно изоморфны. Среди гомеоморфных друг дружке *неодносвязных* областей уже, как правило, существует много (континуум) конформно неизоморфных.

У принципа сохранения области есть важное следствие, называемое принципом максимума модуля:

Предложение 4.13. *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — связное открытое множество и $f\colon U \to \mathbb{C}$ — непостоянная голоморфная функция. Тогда функция $z \mapsto |f(z)|$ не может иметь локального максимума ни в одной точке множества U.*

Доказательство. Если $a \in U$ — произвольная точка, то предложение 4.5 показывает, что образ любой окрестности точки a при отображении f содержит открытый круг с центром $f(a)$, и в этом круге неизбежно будут содержаться комплексные числа с модулем, бóльшим, чем у числа $f(a)$. $\square$

Точно такое же рассуждение показывает, что на $\operatorname{Re} f(z)$, ни $\operatorname{Im} f(z)$ не могут иметь локального экстремума в U, а если предположить дополнительно, что f не имеет нулей в U, то $|f(z)|$ не может иметь в U не только локального максимума, но и локального минимума; отсюда немедленно следует, что всякий многочлен f положительной степени с комплексными коэффициентами имеет корень в $\mathbb{C}$: так как, очевидно, $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = +\infty$, то $|f(z)|$ обязан достигать наименьшего значения в какой-то точке $z \in \mathbb{C}$.

Из принципа максимума модуля можно вывести интересное следствие:

Предложение 4.14 (лемма Шварца). *Пусть* $\Delta = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ — *единичный круг, и пусть* $f\colon \Delta \to \Delta$ — *такое голоморфное отображение, что* $f(0) = 0$. *Тогда* $|f'(0)| \leqslant 1$ *и* $|f(z)| \leqslant |z|$ *для всех* $z \in \Delta \setminus \{0\}$*; более того, если хотя бы в одном из этих неравенств достигается равенство (хотя бы при одном* $z \neq 0$*, если речь идет о втором из неравенств), то функция* f *имеет вид* $f(z) = e^{i\theta} z$ *для некоторого* $\theta \in \mathbb{R}$ *(иными словами, отображение* f — *не что иное, как поворот на угол* θ*).*

Доказательство. Если $f(z)$ тождественно равно нулю, то доказывать нечего, так что можно считать, что функция f не является константой. Поскольку $f(0) = 0$, функция $g(z) = f(z)/z$ голоморфна в Δ (см. предложение 3.2). Выберем действительное число $r \in (0;1)$ и рассмотрим замкнутый диск $D_r = \{z \in \Delta \mid |z| \leqslant r\} \subset \Delta$. Предложение 4.13 показывает, что наибольшее значение функции $z \mapsto |g(z)|$ в D_r достигается на границе этого диска, но на ∂D_r выполнено неравенство $|f(z)/z| \leqslant 1/r$, так что $|g(z)| \leqslant 1/r$ и для всех $z \in D_r$; устремляя r к единице, получаем, что $|g(z)| \leqslant 1$ для всех $z \in \Delta$, что доказывает второе неравенство. Устремляя z к нулю в неравенстве $|f(z)/z| \leqslant 1$, получаем, что $|f'(0)| \leqslant 1$.

Предположим теперь, что $|f(z)| = |z|$ для некоторого $z \in \Delta \setminus \{0\}$, или что $|f'(0)| = 1$; любое из этих равенств означает, что $|g(z)| = 1$ для некоторого $z \in \Delta$. Выберем число r так, чтобы выполнялось неравенство $|z| < r < 1$; тогда из уже доказанного следует, что функция $z \mapsto |g(z)|$ достигает наибольшего значения (равного единице) в точке z, лежащей в $\operatorname{int} D_r$; стало быть, функция g — константа в силу предложения 4.13, так что существует такое число $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, что $f(z) = \lambda z$ для всех z. Осталось заметить, что функция такого вида отображает Δ в Δ только при $|\lambda| \leqslant 1$, а также что при $|\lambda| < 1$ равенства $|f'(0)| = 1$ или $|f(z)| = |z|$ невозможны. $\square$

Воспользуемся леммой Шварца для нахождения групп автоморфизмов единичного круга и верхней полуплоскости.

Предложение 4.15. *Группа автоморфизмов единичного круга* $\Delta = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \,\}$ *состоит из всевозможных преобразований вида*

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \tag{4.1}$$

где $z \in \Delta$ *и* $\theta \in \mathbb{R}$.

Доказательство. В том, что всякое преобразование вида (4.1) действительно является автоморфизмом круга, а также что такие автоморфизмы образуют группу, слушатели могут убедиться самостоятельно. Докажем, что других автоморфизмов нет. Пусть $f\colon \Delta \to \Delta$ — автоморфизм; взяв композицию f с автоморфизмом $z \mapsto (z-f(0))/(1-\overline{f(0)}z)$, переводящим $f(0)$ в 0, можно добиться того, что наш автоморфизм будет переводить 0 в 0; теперь достаточно доказать, что автоморфизм, сохраняющий точку 0 (меняя обозначения, обозначим его снова через f), имеет вид (4.1); мы покажем, что он даже является поворотом относительно точки 0.

В самом деле, поскольку $f(\Delta) = \Delta$ и $f(0) = 0$, лемма Шварца показывает, что $|f(z)| \leqslant |z|$ для всех $z \in \Delta$; применяя то же рассуждение к обратному отображению $f^{-1}\colon \Delta \to \Delta$, получаем, что $|f^{-1}(f(z))| \leqslant |f(z)|$, то есть $|f(z)| \geqslant |z|$, откуда $|f(z)| = |z|$ для всех z. Теперь та же лемма Шварца показывает, что $f(z) = e^{i\theta}z$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$, что и требовалось. □

Предложение 4.16. *Группа автоморфизмов верхней полуплоскости* $H = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \,\}$ *состоит из преобразований вида*

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \tag{4.2}$$

где $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Ввиду предложения 4.15 автоморфизмы верхней полуплоскости получаются из автоморфизмов вида (4.1) сопряжением с помощью преобразования $z \mapsto i(1-z)/(1+z)$, задающего изоморфизм единичного круга и верхней полуплоскости. Стало быть, всякий автоморфизм верхней полуплоскости является «дробно-линейным преобразованием» $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ (вспомним, что композиция двух дробно-линейных преобразований дробно-линейна, так же как и обратное к дробно-линейному преобразованию). Оставшуюся часть рассуждения проведите самостоятельно (см. курс геометрии, читающийся в НМУ в первом семестре). □

Нетрудно проверить, что единственный неединичный элемент группы $SL_2(\mathbb{R})$, индуцирующий тождественное преобразование, —

это матрица $\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$. Следовательно, группа автоморфизмов верхней полуплоскости (а стало быть, и единичного круга) изоморфна $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$, где I — единичная матрица; из предложения 4.15 ясно, что эта группа действует на Δ (соотв. H) транзитивно, а также что стабилизатор любой точки изоморфен $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Стоит также обратить внимание на то обстоятельство, что найденные нами группы автоморфизмов оказались конечномерными; это опять очень непохоже на вещественный анализ: голоморфные функции являются гораздо более «жесткими», чем гладкие функции действительного переменного.

Коль скоро речь зашла о группах автоморфизмах, найдем и группу автоморфизмов комплексной плоскости.

Предложение 4.17. *Группа автоморфизмов комплексной плоскости $\mathbb{C}$ состоит из преобразований вида*

$$z \mapsto az + b, \tag{4.3}$$

где $a, b \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$.

Доказательство. Пусть $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — автоморфизм; тогда f — целая функция. Покажем, что функция $g(z) = f(1/z)$ не может иметь в нуле существенную особенность. В самом деле, пусть $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geqslant 1\}$; так как f — автоморфизм и тем самым гомеоморфизм, множество $f(D) \subset \mathbb{C}$ замкнуто и отлично от всего $\mathbb{C}$. Заметим теперь, что предельные точки последовательностей $\{g(z_n)\}$, где $z_n \to 0$, принадлежат множеству D; стало быть, не всякое комплексное число может быть такой предельной точкой, и наше утверждение следует из пункта (3) теоремы 3.9.

Теперь следствие 4.4 показывает, что f — многочлен; поскольку f — изоморфизм, его производная не обращается в нуль. Так как производная многочлена — многочлен и так как всякий многочлен, не имеющий в $\mathbb{C}$ корней, обязан быть константой, получаем, что f' — константа, так что f имеет вид (4.3). $\square$