Лекция 6. Риманова поверхность алгебраической функции

Вся эта лекция будет посвящена разбору одного-единственного, но очень важного, примера: конструкции «римановой поверхности алгебраической функции».

Пусть $F(z,w)$ — неприводимый многочлен от двух переменных с комплексными коэффициентами. В старину говорили, что уравнение $F(z,w) = 0$ задает w как многозначную алгебраическую функцию от z; в наши дни рассматривают множество $C = \{\, (z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid F(z,w) = 0 \,\}$ и называют его «плоской аффинной алгебраической кривой». Так или иначе, с уравнением $F(z,w) = 0$ можно связать компактную риманову поверхность.

Представим многочлен F в виде

$$F(z,w) = P_n(z)w^n + P_{n-1}(z)w^{n-1} + \ldots + P_0(z), \tag{6.1}$$

где P_j — многочлены от z. Обозначим через $p\colon (z,w) \to z$ и $q\colon (z,w) \to w$ проекции кривой C на оси координат. Для «общей» точки $z \in \mathbb{C}$ множество $p^{-1}(z)$ содержит n элементов, так как F является многочленом от w степени n. Выясним, у каких z прообразов меньше, чем n (больше, чем n, их быть не может: так как степень многочлена F по w равна n, это означало бы, что в некоторой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ все многочлены P_i обращаются в нуль, но тогда многочлен F делится на $z - z_0$, в противоречие с неприводимостью).

Во-первых, менее n прообразов будет у тех точек $z \in \mathbb{C}$, в которых $P_n(z) = 0$ (так как для w получится уравнение степени $\leqslant n-1$); во вторых, даже если $P_n(z) \neq 0$, менее n корней в уравнении для w будет для тех точек $z \in \mathbb{C}$, в которых дискриминант F как многочлена от w обращается в нуль.

Лемма 6.1. *Дискриминант многочлена F, рассматриваемого как многочлен от w, не может тождественно равняться нулю.*

Доказательство. Поскольку многочлен F неприводим в кольце $\mathbb{C}[z,w]$, лемма Гаусса показывает, что он неприводим и как элемент кольца $\mathbb{C}(z)[w]$ (кольцо многочленов от переменной w над полем рациональных функций $\mathbb{C}(z)$); стало быть, его наибольший общий делитель со своей производной (по w) равен единице, так что его дискриминант не равен нулю как элемент $\mathbb{C}(z)$ и тем самым не может тождественно равняться нулю как функция от z. $\square$

Итак, дискриминант многочлена F может обращаться в нуль только в конечном числе точек $z \in \mathbb{C}$. Обозначим теперь через Σ множество (конечное) точек $z \in \mathbb{C}$, в которых либо $P_n(z) = 0$, либо обращается в нуль дискриминант; все остальные точки имеют ровно n прообразов при отображении p. Положим $X_0 = p^{-1}(\mathbb{C} \setminus \Sigma)$ и обозначим через $p_0 \colon X_0 \to \mathbb{C} \setminus \Sigma$ и $q_0 \colon X_0 \to \mathbb{C}$ ограничения p и q на X_0.

Предложение 6.2. *Отображение $p_0 \colon X_0 \to \mathbb{C} \setminus \Sigma$ является накрытием степени n; если снабдить X_0 структурой римановой поверхности, индуцированной с $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ с помощью этого накрытия (как в предложении 5.12), то отображения p_0 и q_0 будут голоморфны.*

Доказательство. Пусть $(z, w) \in X_0$; покажем, что $(\partial F/\partial w)(z, w) \neq 0$. В самом деле, если бы эта частная производная равнялась нулю, то число w было бы кратным корнем многочлена $F(z, \cdot)$, и дискриминант этого многочлена равнялся нулю, то есть дискриминант многочлена F, рассматриваемого как многочлен от w над $\mathbb{C}(z)$, обращался бы в нуль в точке z, в противоречие с тем, что $z \notin \Sigma$.

Коль скоро $(\partial F/\partial w)(z, w) \neq 0$, можно воспользоваться теоремой о неявной функции и локально выразить w как голоморфную функцию от z (из «обычной» (вещественной) теоремы о неявной функции следует только, что w локально является гладкой функцией от z, но поскольку многочлен F, очевидно, является голоморфной функцией от двух переменных, формула для производной неявной функции показывает, что производная этой функции $\mathbb{C}$-линейна, откуда вытекает и голоморфность; ср. предложение 1.6). Конкретнее, существуют такие окрестности $U_{z,w} \ni z$ и $V_{z,w} \ni w$ и голоморфная функция $\varphi_{z,w} \colon U_{z,w} \to V_{z,w}$, что при $(s, t) \in U_{z,v} \times V_{z,w}$ равенство $F(s, t) = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $t = \varphi_{z,w}(s)$. Положим теперь $U_z = \bigcap_{w \in p_0^{-1}(z)} U_{z,w}$, а для каждого $w \in p_0^{-1}(z)$ положим $U'_{v,w} = \{(z, \varphi_{z,w}(z)) \mid z \in U_z\}$; теперь очевидно, что p гомеоморфно отображает каждую из окрестностей $U'_{z,w}$ на U_z, причем множества $U'_{z,w}$ попарно не пересекаются (если бы два таких множества пересеклись в точке $(s, t) \in X_0$, то у точки s было бы менее n прообразов, что невозможно, так как $s \notin \Sigma$). Поскольку для каждой $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ имеется ровно n открытых множеств $U'_{z,w}$, по числу прообразов точки z, тот факт, что p_0 — накрытие, доказан.

Голоморфность отображения $p_0 \colon X_0 \to \mathbb{C} \setminus \Sigma$ очевидна из конструкции структуры римановой поверхности на накрытии, а голоморфность отображения $q_0 \colon X_0 \to \mathbb{C}$ — из того, что в локальных координатах в окрестности (z, w) это отображения выглядит как голоморфная функция $\varphi_{v,w}$. $\square$

Прежде, чем двигаться дальше, докажем следующий технический результат:

Предложение 6.3. *Множество $X_0 \subset \mathbb{C}^2$ связно.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что X_0 является объединением двух непересекающихся открытых подмножеств C_1 и C_2; очевидно, они являются накрытиями над $\mathbb{C}\setminus\Sigma$ степеней k_1 и k_2 соответственно, причем $k_1+k_2=n$. Для всякой точки $z\in\mathbb{C}\setminus\Sigma$ пусть $u_1(z),\dots,u_{k_1}(z)$ — ее прообразы (относительно p_0), лежащие в C_1, а $v_1(z),\dots,v_{k_2}(z)$ — ее прообразы, лежащие в C_2 (нумерация произвольна). Положим

$$\begin{aligned}R_1(z,w)&=(w-u_1(z))\dots(w-u_{k_1}(z))=\\&=w^{k_1}+L_{k_1-1}(z)w^{k_1-1}(z)+\dots+L_0(z),\\R_2(z,w)&=(w-v_1(z))\dots(w-v_{k_2}(z))=\\&=w^{k_2}+Q_{k_2-1}(z)w^{k_2-1}(z)+\dots+Q_0(z).\end{aligned}$$

Очевидно, функции L_i и Q_j голоморфны на $\mathbb{C}\setminus\Sigma$ (поскольку локально они выражаются как симметрические функции от голоморфных функций $\varphi_{z,w}$ из доказательства предложения 6.2); если мы докажем, что все Q_i и L_j являются рациональными функциями от z, то противоречие будет получено, поскольку, очевидно, $R_1(z,w)R_2(z,w)=F(z,w)/P_n(z)$, и получилось бы, что многочлен $F(z,w)/P_n(z)\in\mathbb{C}(z)[w]$ приводим над $\mathbb{C}(z)$, что как мы уже отмечали, противоречит неприводимости многочлена F в $\mathbb{C}[z,w]$ ввиду леммы Гаусса.

Доказательству рациональности Q_i и L_j предпошлем простую лемму.

Лемма 6.4. *Всякий корень многочлена $w^n+a_{n-1}w^{n-1}+\dots+a_0$ не превосходит по модулю числа $M=n\cdot\max(|a_{n-1}|,\dots,|a_0|,1)$.*

Доказательство леммы. Если $|w|>M$, то $|a_{n-j}w^j|<|w^n|/n$ при всяком $j\in[1;n]$, так что $|w^n|$ больше суммы модулей остальных слагаемых и w не может быть корнем. □

Теперь заметим, что $u_i(z)$ и $v_j(z)$ являются корнями многочлена со старшим коэффициентом единица, коэффициенты которого являются рациональными функциями от z с полюсами, содержащимися в множестве Σ; эти рациональные функции имеют не более чем полиномиальный рост при стремлении z к точкам из Σ или к бесконечности; из доказанной леммы следует, что рост $u_j(z)$ и $v_j(z)$ при стремлении z к точкам из Σ или к бесконечности также не более чем полиномиален. Поскольку $Q_i(z)$ и $L_j(z)$ являются симметрическим функциями от $u_{i_k}(z)$ и $v_{j_k}(z)$, они также имеют не более чем полиномиальный рост при стремлении z к точкам из Σ или к бесконечности, и предложение 5.7 показывает, что они являются рациональными функциями, что и требовалось. □

Теперь мы готовы к тому, чтобы построить комактную риманову поверхность, соответствующую кривой C (или w как алгебраической функции от z). Все сведется к тому, что мы добавим к X_0 конечное число точек.

Именно, вложим $\mathbb{C}$ в $\overline{\mathbb{C}}$, положим $S = \Sigma \cup \{\infty\}$, и будем рассматривать X_0 как накрытие над $\overline{\mathbb{C}} \setminus S$. Для всякой точки $x \in S$ рассмотрим открытое множество $U \subset \overline{\mathbb{C}}$, содержащее x, изоморфное диску $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ и не содержащее других точек из S. Положим $U^* = U \setminus \{x\}$; очевидно, U^* изоморфно проколотому диску. Очевидно, имеется разложение на компоненты связности $p_0^{-1}(U^*) = \bigcup_{j=1}^{m} V_j^*$, где V_j^* — открытое связное множество, являющееся накрытием над U^* степени e_j, причем множества V_j^* попарно не пересекаются. Предложение 5.15 показывает, что каждое из $V_j^* \subset X_0$ изоморфно проколотому диску, причем ограничение отображения p_0 на V_j^* изоморфно возведению в степень e_j. Для каждого из V_j^* добавим к множеству X_0 по точке ξ_j; проделав эту операцию для каждого из $x \in S$, получим множество X, являющееся объединением X_0 с конечным числом точек. Это и будет наша компактная риманова поверхность: надо только ввести на ней топологию и локальные карты.

Топология на X. На $X_0 \subset X$ топологию оставим прежнюю; остается определить базисы окрестностей добавленных точек, а это делается так: если добавленная точка ξ_j соответствует множеству V_j^*, то в качестве базиса ее окрестностей выберем набор таких множеств W, что $W \setminus \xi_j$ содержится в V_j^* и в нем открыто. Теперь можно продолжить отображение $p_0\colon X_0 \to \overline{\mathbb{C}} \setminus S$ до отображения $\overline{p}\colon X \to \overline{\mathbb{C}}$ следующим образом: если добавленная точка ξ_j такая же, как выше, а множество V_j^* является компонентой прообраза проколотой окрестности точки x, то полагаем $\overline{p}(\xi_j) = x$. Легко проверить, что отображение $\overline{p}$ непрерывно, а топологическое пространство X компактно.

Локальные карты на X. К уже имеющимся локальным картам на X_0 добавим следующие: пусть ξ_j — добавленная точка, соответствующая множеству V_j^*; положим $V_j = V_j^* \cup \{\xi_j\}$, рассмотрим изоморфизм $\varphi\colon V_j^* \to \Delta^*$ на проколотый диск и продолжим его до отображения $V_j \to \Delta$ на непроколотый диск, положив $\xi_j \mapsto 0$. Легко видеть, что полученное отображение является гомеоморфизмом; мы объявим V_j координатной окрестностью точки ξ_j, а построенное отображение — локальной картой. Выполнимость аксиом римановой поверхности очевидна; ясно также, что отображение $\overline{p}\colon X \to \overline{\mathbb{C}}$ голоморфно (вне добавленных точек это очевидно, а в добавленных нами локальных картах это отображение является возведением в степень).

Осталось заметить, что риманова поверхность X связна, так как ввиду предложения 6.3 связно ее плотное подмножество X_0, и констатировать, что наша конструкция завершена.

Сделаем два замечания по поводу того, что мы построили.

Во-вторых, наша конструкция является на самом деле универсальной: как утверждает так называемая «теорема существования Римана», *всякая* компактная риманова поверхность является римановой поверхностью некоторой алгебраической функции. Если мы уже знаем, что существует непостоянное голоморфное отображение данной компактной римановой поверхности X в $\overline{\mathbb{C}}$ (то есть непостоянная мероморфная функция на X), то несложно доказать (с помощью рассуждений, подобных использованным в доказательстве предложения 6.3), что X действительно является римановой поверхностью алгебраической функции, но для доказательства теоремы существования Римана необходимо еще убедиться, что на X существует хоть одна непостоянная мероморфная функция, и это уже сложнее. Доказывать теорему существования Римана мы не будем (это требует привлечения существенно новых идей), но мы проверим ее для эллиптических кривых (в этом случае требуемые мероморфные функции удается построить «руками»).

Во-вторых, отметим, что риманову поверхность алгебраической функции, соответствующую плоской кривой C, по-ученому называют «гладкая полная модель кривой C».

В связи с нашей конструкцией уместно описать топологическое строение произвольного голоморфного отображения компактных римановых поверхностей.

Предложение 6.5. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непостоянное голоморфное отображение компактных связных римановых поверхностей. Тогда:*

(1) $f(X) = Y$.

(2) *Слои отображения f конечны.*

(3) *Число точек ветвления f на X конечно; если $S \subset Y$ — конечное подмножество, содержащее образы всех точек ветвления на X, то индуцированное отображение $X \setminus f^{-1}(S) \to Y \setminus S$ является накрытием.*

(4) *Пусть n — степень накрытия, о котором шла речь в предыдущем пункте, и пусть $y \in Y$ и $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$. Если обозначить индекс ветвления f в точке x_j через e_j, то имеем $\sum_{j=1} e_j = n$.*

Доказательство. (1) $f(X)$ замкнуто в Y, так как X компактно, и открыто в Y по принципу сохранения области. Так как Y связно, $f(X) = Y$.

(2) Если множество $f^{-1}(y)$, где $y \in Y$, имеет предельную точку x_0, то по принципу аналитического продолжения f является константой в окрестности точки x_0, а значит, и всюду — противоречие. Стало быть, множество $f^{-1}(y)$ дискретно в X, а значит и конечно ввиду компактности X.

(3) В локальных координатах точка ветвления — это нуль производной. По принципу аналитического продолжения множество нулей производной может иметь предельную точку только в том случае, если производная на непустом открытом подмножестве равна нулю, т. е.

отображение f на открытом подмножестве (а значит, и всюду на X) является константой, что противоречит условию. Значит, множество точек ветвления дискретно в X; так как X компактно, это множество конечно.

Пусть теперь $y \in Y \setminus S$ и $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Поскольку f неразветвлено во всех x_j, по теореме об обратной функции у каждой из точек x_j существует окрестность U_j, которую f гомеоморфно отображает на ее образ в Y; уменьшая при необходимости окрестности U_j, можно добиться того, что они будут связными и попарно непересекающимися, а f будет неразветвлено на их объединении. Положим теперь $U = \bigcap_j f(U_j) \ni y$; тогда $f^{-1}(U)$ распадается в объединение n попарно непересекающихся связных множеств, каждое из которых гомеоморфно отображается с помощью f на U. Тот факт, что для всех $y \in Y \setminus S$ количество таких окрестностей равно n, легко выводится из связности $Y \setminus S$ и компактности X (аккуратнее говоря, собственности отображения f).

(4) Ясно, что точки x_j можно окружить непересекающимися окрестностями $U_j \ni x_j$, обладающими тем свойством, что ограничение f на U_j записывается в подходящих локальных координатах как возведение в степень e_j и ограничение f на $U_j \setminus \{x_j\}$ является e_j-листным накрытием на свой образ. Так как для всех y', достаточно близких к y, имеем $f^{-1}(y') \subset \bigcup_j U_j$, равенство $\sum e_j = n$ следует из того, что точки y', достаточно близкие к y и отличные от нее, имеют n прообразов. $\square$

Определение 6.6. Число n, введенное в пункте (3) выше (число прообразов общей точки), называется *степенью* отображения f и обозначается $\deg f$.

Замечание 6.7. Образы в Y точек ветвления отображения f часто также называют точками ветвления.

Отображения, структура которых описана в предложении 6.5, часто называют «разветвленными накрытиями»; их не надо путать с «настоящими» накрытиями в топологическом смысле.