Лекция 7. Эллиптические функции

На этой лекции мы докажем, в числе прочего, что всякая эллиптическая кривая является римановой поверхностью некоторой алгебраической функции.

Пусть $L \subset \mathbb{C}$ — решетка с базисом $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$ и $E = \mathbb{C}/L$ — соответствующая эллиптическая кривая. По предложению 5.8 непостоянных голоморфных функций на E нет; будем искать мероморфные функции. Ясно, что мероморфная функция на E — это то же самое, что двоякопериодическая мероморфная функция на $\mathbb{C}$, имеющая числа ω_1 и ω_2 своими периодами; такие двоякопериодические мероморфные функции называются *эллиптическими функциями*.

Предложение-определение 7.1. *Ряд*

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{u \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-u)^2} - \frac{1}{u^2} \right) \tag{7.1}$$

сходится абсолютно и равномерно на любом компактном подмножестве в $\mathbb{C} \setminus L$ к мероморфной функции, обозначаемой $\wp(z)$ и называемой $\wp$-функцией Вейерштрасса. *Функция $\wp$ является четной и удовлетворяет тождеству $\wp(z+u) = \wp(z)$ при всех $u \in L$. В каждой точке решетки L функция $\wp$ имеет полюс второго порядка, а других полюсов у нее нет. Главная часть ряда Лорана функции $\wp$ в нуле имеет вид $1/z^2$.*

Доказательство. Пусть $K \subset \mathbb{C} \setminus L$ — компакт и $z \in K$. Тогда имеем $|z - 2u| \sim 2|u|$ и $|z-u| \sim |u|$ при $u \in L$, $|u| \to \infty$, причем эти эквивалентности равномерны по $z \in K$. Следовательно, имеем

$$\left| \frac{1}{(z-u)^2} - \frac{1}{u^2} \right| = \frac{|z| \cdot |z-2u|}{|u|^2 \cdot |z-u|^2} = O\Big(\frac{1}{|u|^3}\Big)$$

(O равномерно по $z \in K$), откуда утверждение о сходимости следует с очевидностью. Стало быть, $\wp$ голоморфна на $\mathbb{C} \setminus L$; тождество $\wp(-z) = \wp(z)$ немедленно следует из возможности переставлять члены в абсолютно сходящемся ряде.

Ввиду равномерной сходимости ряда (7.1) на компактах его можно почленно продифференцировать; если сделать это, получится формула

$$\wp'(z) = -2 \sum_{u \in L} \frac{1}{(z-u)^3}, \tag{7.2}$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах в $\mathbb{C} \setminus L$; из абсолютной сходимости ряда (7.2) немедленно следует, что $\wp'(z+u) = \wp'(z)$ при любом $u \in L$; следовательно, для всякого $u \in L$ имеем

$\wp(z+u)-\wp(u)=C$, где $C\in\mathbb{C}$ — константа. Ввиду четности $\wp$ имеем теперь

$$\wp(-u/2)=\wp(u/2)=\wp(-u/2+u)=\wp(-u/2)+C,$$

откуда $C=0$, что доказывает тождество $\wp(z+u)=\wp(z)$ при $u\in L$. Утверждения о полюсах функции $\wp$ следуют с очевидностью из всего доказанного выше. □

Следствие 7.2. *Функция $\wp'$ мероморфна на $\mathbb{C}$, нечетна и двоякопериодична с периодами ω_1 и ω_2; она имеет полюса порядка 3 во всех точках решетки, а других полюсов не имеет; главная часть ряда Лорана функции $\wp'$ в нуле имеет вид $(-2/z^3)$.* □

Эллиптическую кривую $E=\mathbb{C}/L$ можно рассматривать как группу по сложению (факторгруппу аддитивной группы $\mathbb{C}$); очевидно, как группа она изоморфна $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})\times(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$; стало быть, E имеет ровно четыре точки второго порядка: образы точек 0, $\omega_1/2$, $\omega_2/2$ и $(\omega_1+\omega_2)/2$.

Коль скоро функции $\wp$ и $\wp'$ двоякопериодичны с периодами ω_1 и ω_2, их можно рассматривать как мероморфные функции на E, то есть как голоморфные отображения из E в $\overline{\mathbb{C}}$.

Предложение 7.3. *Функция $\wp$, рассматриваемая как голоморфное отображение из E в $\overline{\mathbb{C}}$, имеет степень 2, а функция $\wp'$ — степень 3. Отображение $\wp\colon E\to\overline{\mathbb{C}}$ разветвлено с индексом два в точках второго порядка и неразветвлено в остальных точках. Если $\wp(a_1)=\wp(a_2)$, где $a_1,a_2\in E$, то $a_2=\pm a_1$ (если рассматривать a_1 и a_2 как комплексные числа, это запишется как $a_2\equiv\pm a_1 \pmod L$). Если $a\in C$ — число, соответствующее точке второго порядка, отличной от нуля, то $\wp'(a)=0$. Если $\wp'(z)=0$, то z сравнимо по модулю L с $\omega_1/2$, $\omega_2/2$ или $(\omega_1+\omega_2)/2$.*

Доказательство. Если рассматривать $\wp$ и $\wp'$ как голоморфные отображения из E в $\overline{\mathbb{C}}$, то предложение 7.1 и следствие 7.2 показывают, что $\wp^{-1}(\{\infty\})=\wp'^{-1}(\{\infty\})=\{0\}$, причем индекс ветвления в нуле равен двум для $\wp$ и трем для $\wp'$; ввиду предложения 6.5 отсюда следуют утверждения про степени. Если $a\in\mathbb{C}$ — число, соответствующее точке второго порядка на E, то $a\equiv -a \pmod L$, откуда ввиду четности $\wp$ получаем тождество $\wp(a+z)=\wp(-a-z)=\wp(a-z)$; дифференцируя это равенство по z при $z=0$, получаем $\wp'(a)=-\wp'(a)$, откуда $\wp'(a)=0$. Стало быть, отображение $\wp$ разветвлено во всех точках второго порядка, причем индекс ветвления не может быть больше двух ввиду предложения 6.5, поскольку $\deg\wp=2$. Далее, из доказанных равенств следует, что все три точки второго порядка, кроме нуля, содержатся в множестве $\wp'^{-1}(0)$; поскольку $\deg\wp'=3$, ничего другого в этом множестве содержаться не может (и отображение $\wp'$ в этих точках неразветвлено), так что у отображения $\wp$ нет других точек ветвления, кроме точек

второго порядка, а у функции $\wp'$ нет других нулей на $\mathbb{C}$, кроме сравнимых с $\omega_1/2$, $\omega_2/2$ или $(\omega_1+\omega_2)/2$, причем эти нули просты. Если, наконец, $\wp(a_1)=\wp(a_2)$ и $a_1 \neq a_2$ на E, то обе эти точки лежат в $\wp^{-1}(b)$, где $b=\wp(a_1)=\wp(a_2)\in\overline{\mathbb{C}}$; поскольку имеем также $\wp(-a_1)=b$ ввиду четности $\wp$, то $-a_1=a_2$ (если $-a_1=a_1$, то a_1 — точка второго порядка, отображение $\wp$ в ней разветвлено и $a_2=a_1$). Все доказано. □

Положим $e_1=\wp(\omega_1/2)$, $e_2=\wp((\omega_1+\omega_2)/2)$, $e_3=\wp(\omega_2/2)$. Заметим, что числа e_1, e_2 и e_3 различны: если значения $\wp$ в каких-то двух из этих точек совпадают и равны, скажем, $c\in\mathbb{C}$, то, рассматривая $\wp$ как голоморфное отображение из E в $\overline{\mathbb{C}}$, получаем, что $\wp^{-1}(c)$ содержит две разные точки ветвления, что невозможно, так как $\deg\wp=2$.

Предложение 7.4. *Функции $\wp$ и $\wp'$ связаны тождеством*

$$(\wp'(z))^2=4(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3). \tag{7.3}$$

Доказательство. И левая, и правая часть (7.3) — мероморфные функции на E, имеющие полюса порядка 6 в точке 0 и нигде больше и обращающиеся в нуль в остальных точках второго порядка (и левая, и правая часть — с кратностью 2) и нигде больше. Следовательно, их отношение — голоморфная функция на E, то есть константа. Поскольку «старший» (с наиболее отрицательной степенью z) член ряда Лорана в нуле и у левой, и у правой части имеет вид $4/z^6$, эта константа равна единице. □

Предложение 7.5. *Эллиптическая кривая E изоморфна римановой поверхности алгебраической функции, заданной уравнением*

$$w^2=4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3). \tag{7.4}$$

Доказательство. Пусть X — компактная риманова поверхность, соответствующая алгебраической функции с уравнением (7.4). Обозначим через $E_0\subset E$ подмножество, получаемое удалением из E точек второго порядка, а через X_0 — подмножество в $\mathbb{C}^2$, состоящее из точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (7.4), причем $z\notin\{e_1,e_2,e_3\}$. Легко видеть, что X_0 — это то самое множество, что было обозначено через X_0 в предыдущей лекции, причем X получается добавлением к X_0 четырех точек, лежащих над e_1, e_2, e_3 и ∞. Определим отображение $\varphi_0\colon E_0\to X_0$ по формуле $z\mapsto(\wp(z),\wp'(z))$ (то, что $\varphi_0(E_0)\subset X_0$, следует из соотношения (7.3)). Ясно, что отображение φ_0 голоморфно. Покажем, что оно является биекцией E_0 на X_0. В самом деле, если $\wp(a_1)=\wp(a_2)$, причем $a_1,a_2\in E_0$, то $a_1=\pm a_2$ ввиду предложения 7.3; поскольку ввиду нечетности функции $\wp'$ имеем $\wp'(-a_1)=-\wp'(a_1)$, причем $\wp'(a_1)\neq 0$, так как a_1 не является точкой второго порядка (см.

то же предложение 7.3), случай $a_1 = -a_2$ исключается; тем самым доказана инъективность отображения φ_0. Если $(z, w) \in X_0$, то, очевидно, $z = \wp(a) = \wp(-a)$ для некоторого $a \in E$ (так как отображение $\wp\colon E \to \overline{\mathbb{C}}$ сюръективно); из формулы (7.3) и нечетности функции $\wp'$ теперь следует, что либо $\wp'(a)$, либо $\wp'(-a)$ равно w, так что φ_0 и сюръективно. Итак, $\varphi_0\colon E_0 \to X_0$ — голоморфная биекция и, стало быть, изоморфизм. Продолжим теперь отображение φ_0 до отображения $\varphi\colon E \to X$ следующим образом: переведем ноль в точку римановой поверхности X, лежащую над ∞, а точку второго порядка $a \neq 0$ — в точку, лежащую над $\wp(a)$. Легко видеть, что отображение $\varphi\colon E \to X$ непрерывно (следовательно, по теореме Римана об устранимой особенности оно голоморфно) и биективно, так что φ — изоморфизм. Все доказано. □

Предложение 7.4 можно обратить:

Предложение 7.6. *Риманова поверхность алгебраической функции, заданной уравнением*

$$w^2 = c(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)(z - \lambda_3), \tag{7.5}$$

где $c \neq 0$, а числа λ_1, λ_2 и λ_3 различны, является эллиптической кривой.

Доказательство. Начнем с важного определения.

Определение 7.7. *Голоморфной 1-формой* (классический термин: *дифференциал первого рода*) на римановой поверхности X называется комплексная дифференциальная форма степени 1 на X, которую в локальных координатах можно записать в виде $\omega = f\,dz$, где функция f голоморфно зависит от локальной координаты z.

Сделаем два простых замечания к этому определению. Во-первых, если функция замены координат $z = z(w)$ голоморфна, то имеем $f(z)\,dz = f(z(w))z'(w)\,dw$ (см. предложение 1.3), так что форма, записываемая в одной из систем координат в виде $f\,dz$, где f голоморфна, будет записываться в таком виде и в *любой* системе координат. Во-вторых, всякая голоморфная 1-форма будет обязательно замкнута (предложение 1.3 (5)), так что ее интегралы по двум гомологичным 1-цепям совпадают.

Пусть теперь X — риманова поверхность алгебраической функции, заданной уравнением (7.5). Обозначим правую часть (7.5) через $P(z)$. Легко видеть, что естественное отображение $p\colon X \to \overline{\mathbb{C}}$ имеет степень 2 и разветвлено с индексом 2 ровно в четырех точках, лежащих над λ_1, λ_2 и λ_3 и бесконечностью; обозначим эти точки a_1, a_2, a_3 и $\overline{\infty}$. Отсюда немедленно следует, что X гомеоморфна тору (иными словами, род X

равен единице). Проще всего убедиться в этом, подсчитав эйлерову характеристику: триангулируем сферу $\overline{\mathbb{C}}$ на достаточно мелкие симплексы таким образом, чтобы образы точек ветвления являлись вершинами триангуляции; пусть V, E и F — число вершин, ребер и граней этой триангуляции. Беря прообразы симплексов этой триангуляции на X, мы получим триангуляцию поверхности X, в которой количество вершин, ребер, и граней будет равно $V' = 2V - 4$, $E' = 2E$ и $F' = 2F$ соответственно (каждое ребро и грань «удвоится», так как степень равна двум, а из вершин удвоятся все, кроме тех четырех, что лежат в точках ветвления); так как $V - E + F = 2$, получаем, что $V' - E' + F' = 0$, что и требовалось[1].

Теперь построим на X голоморфную 1-форму ω, нигде не обращающуюся в нуль (на самом деле существование такой формы на компактной римановой поверхности — характеристическое свойство эллиптических кривых). Именно, пусть $X_0 = X \setminus \{a_1, a_2, a_3, \overline{\infty}\}$ и $X' = X \setminus \overline{\infty}$. На X' определены голоморфные функции z и w; положим $\omega = dz/w$ на X_0; ясно, что эта голоморфная форма не обращается в нуль на X_0; утверждается, что ее можно продолжить на все X. В самом деле, в точке a_j в качестве локальной координаты можно выбрать w (поскольку $w^2 = P(z)$ и $P(z)$ можно выбрать в качестве локальной координаты на $\overline{\mathbb{C}}$ в окрестности λ_j); так как из соотношения (7.5) следует, что $2w\,dw = P'(z)dz$ на X, имеем $dz/w = 2dw/P'(z)$, и так как $P'(\lambda_j) \neq 0$ (корень λ_j — не кратный), получаем, что форма dz/w продолжается до голоморфной в окрестности точки a_j. Отсталось посмотреть на окрестность точки $\overline{\infty}$; в этой точке можно выбрать такую локальную координату t, что $z = 1/t^2$, $w = h(t)/t^3$, где функция h голоморфна и не обращается в нуль в нуле (так как h — одна из ветвей $\sqrt{c(1 - t^2\lambda_1)(1 - t^2\lambda_2)(1 - t^2\lambda_3)}$). Отсюда получаем, что $dz = -2dt/t^3$ и $\omega = dz/w = -2dt/h(t)$, так что ω продолжается и в $\overline{\infty}$ и не обращается там в нуль.

Так как поверхность X гомеоморфна тору, имеем $H_1(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$; пусть γ_1, γ_2 — образующие этой группы. Обозначим через $L \subset \mathbb{C}$ подгруппу, состоящую из чисел $\int_\gamma \omega$ для всевозможных $\gamma \in H_1(X, \mathbb{Z})$; эта подгруппа порождена числами $u_1 = \int_{\gamma_1} \omega$ и $u_2 = \int_{\gamma_2} \omega$.

Лемма 7.8. *Числа u_1 и u_2 линейно независимы над $\mathbb{R}$.*

Доказательство леммы. Предположим противное; тогда группа L содержится в некоторой прямой; умножая ω на ненулевое комплексное число α, можно добиться того, что эта прямая будет совпадать с вещественной осью.

[1] Если применить эту конструкцию к произвольному голоморфному отображению компактных римановых поверхностей $f\colon X \to Y$, то получится важное соотношение между родами X и Y, степенью f и индексами ветвления, называемое «формулой Римана–Гурвица».

Пусть $\pi\colon \tilde{X} \to X$ — универсальное накрытие; введем на $\tilde{X}$ структуру римановой поверхности, индуцированную с X. Выберем точки $x_0 \in X$ и $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ и определим голоморфную функцию $\tilde{\varphi}\colon \tilde{X} \to \mathbb{C}$ по формуле $x \mapsto \int_{\tilde{x}_0}^{x} (\alpha\pi^*\omega)$ (интегрирование ведется по кривой, соединяющей x_0 и x; ввиду односвязности $\tilde{X}$ от выбора кривой интеграл не зависит). В силу нашего выбора числа α мнимая часть интеграла от $\alpha\omega$ по любому циклу на X равна нулю, так что $\operatorname{Im}\tilde{\varphi}(x) = \operatorname{Im}\tilde{\varphi}(x')$ при $\pi(x) = \pi(x')$. Следовательно, функция $x \mapsto \operatorname{Im}\tilde{\varphi}(x)$ пропускается через компактное пространство X и тем самым достигает наибольшего значения на $\tilde{X}$; по принципу максимума отсюда следует, что $\tilde{\varphi}$ — константа, и, следовательно, $\pi^*\omega = 0$, что нелепо. □

Итак, мы доказали, что $L \subset \mathbb{C}$ — решетка. Определим теперь голоморфное отображение $\varphi\colon X \to \mathbb{C}/L$ по формуле $x \mapsto \int_{x_0}^{x} \omega \mod L$ (при замене пути интегрирования к интегралу прибавится элемент из L, так что отображение определено корректно). Поскольку ω нигде не обращается в нуль, отображение φ неразветвлено и, следовательно, является накрытием; так как отображение $\varphi_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(\mathbb{C}/L, \varphi(x_0)) \cong L$ имеет вид $\gamma \mapsto \int_\gamma \omega$, получаем, что по построению группы L оно сюръективно. Следовательно, φ — голоморфный гомеоморфизм и тем самым изоморфизм. □

Замечание 7.9. К доказательству предложения 7.6 ведет следующий ход мыслей. Мы хотим представить риманову поверхность X в виде $\mathbb{C}/L$, для чего хотелось бы, чтобы отображение $p\colon X \to \overline{\mathbb{C}}$ было похоже на функцию $\wp$, также дающую разветвленное накрытие над $\overline{\mathbb{C}}$ степени два с ветвлением в четырех точках. Однако же функция $\wp$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (7.3); стало быть, чтобы найти наш аналог $\wp$, надо решить дифференциальное уравнение

$$(z')^2 = c(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)(z - \lambda_3), \tag{7.6}$$

что мы и сделали, интегрируя форму $dz/\sqrt{c(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)(z - \lambda_3)}$.

Во избежание недоразумений отметим, что решение уравнения (7.6) не обязательно является именно $\wp$-функцией, хотя и тесно с ней связано (подробнее об этом — на следующей лекции).