## Лекция 9. Теорема Римана

Вся эта лекция будет посвящена доказательству следующей теоремы:

**Теорема 9.1 (теорема Римана об отображении).** *Всякое односвязное открытое множество $U \subset \mathbb{C}$, отличное от самого $\mathbb{C}$, изоморфно диску $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.*

Для удобства введем следующее классическое

**Определение 9.2.** Голоморфная функция $f\colon W \to \mathbb{C}$ на открытом множестве $W \subset \mathbb{C}$ называется *однолистной*, если отображение $f$ взаимно однозначно.

Ясно, что однолистное отображение неразветвлено и, следовательно, является изоморфизмом на свой образ.

Начнем со следующей редукции.

**Лемма 9.3.** *В условиях теоремы $U$ изоморфно открытому подмножеству в $\Delta$.*

*Набросок первого доказательства.* Пусть $H$ — верхняя полуплоскость. На прошлой лекции мы установили, что существует сюръективное голоморфное отображение $k^2\colon H \to \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$, обладающее тем свойством, что $k^2(z_1) = k^2(z_2)$ тогда и только тогда, когда $z_1 = gz_2$ для некоторого $g \in \Gamma(2)$. Можно показать (чего мы, за недостатком времени, делать не будем), что у всякого $z \in H$ существет такая окрестность $V \ni z$, что $gV \cap V = \varnothing$ при $g \neq 1$. Отсюда легко вывести, что естественное отображение $H \to H/\Gamma(2)$ является накрытием, а также что на $H/\Gamma(2)$ можно ввести структуру римановой поверхности, относительно которой это отображение будет голоморфно (подобно тому, как мы в лекции 5 ввели структуру римановой поверхности на эллиптической кривой). При этом отображение $k^2$ индуцирует голоморфное и взаимно однозначное отображение $\widetilde{k^2}\colon H/\Gamma(2) \to \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$; значит, это отображение является изоморфизмом. Резюмируя это обсуждение, заключаем, что универсальное накрытие открытого множества $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ изоморфно $H$, а значит и $\Delta$.

Заметим, что из того, что $U \neq \mathbb{C}$ и $U$ односвязно, следует, что разность $\mathbb{C}\setminus U$ содержит не менее двух точек; не ограничивая общности, можно считать, что $U \subset \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$. Если $\pi\colon \Delta \to \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ — универсальное накрытие, то ввиду односвязности $U$ любая из компонент множества $\pi^{-1}(U) \subset \Delta$ изоморфна $U$. $\square$

*Второе доказательство.* Так как $U \neq \mathbb{C}$, можно, не ограничивая общности, считать, что $U \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Отображение $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$, заданное формулой $z \mapsto z^2$, является двулистным накрытием; так как

$U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ односвязно, множество $f^{-1}(U)$ состоит из двух (непересекающихся) компонент $U_1$ и $U_2$, изоморфных $U$. Пусть $c \in U_2$; тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ диск с радиусом $\varepsilon$ и центром $c$ содержится в $U_2$ и, следовательно, не пересекается с $U_1$. Следовательно, функция $g(w) = \varepsilon/(w - c)$ задает изоморфизм $U_1$ на открытое подмножество в $\Delta$ (так как $|g(w)| < 1$ для всех $w \in U_1$), и это подмножество изоморфно $U$. □

Ввиду доказанной леммы можно считать, что $U \subset \Delta$, что мы и будем далее предполагать. Зафиксируем до конца доказательства некоторую точку $a \in U$.

Сделаем следующее

**Допущение.** *Во множестве голоморфных однолистных отображений из $U$ в $\Delta$ существует отображение $f$, для которого число $|f'(a)|$ наибольшее.*

Покажем, что отображение $f\colon U \to \Delta$, в существование которого мы поверили, является искомым изоморфизмом.

**Предложение 9.4.** *Пусть $\varphi\colon \Delta \to \Delta$ — автоморфизм, переводящий $b \in \Delta$ в $0$. Тогда $|\varphi'(b)| = 1/(1 - |b|^2)$.*

*Доказательство.* Ввиду предложения 4.15 имеем

$$\varphi(z) = e^{i\theta}\frac{z - b}{1 - \overline{b}z},$$

где $\theta \in \mathbb{R}$. Теперь запишем:

$$\varphi'(z) = e^{i\theta}\frac{1 - \overline{b}z + \overline{b}(z - b)}{(1 - \overline{b}z)^2} = e^{i\theta}\frac{1 - |b|^2}{(1 - \overline{b}z)^2}.$$

Остается подставить $z = b$ и взять модуль. □

**Лемма 9.5.** *Если $f\colon U \to \Delta$ — однолистное отображение, для которого число $|f'(a)|$ наибольшее, то $f(a) = 0$.*

*Доказательство.* Рассуждая от противного, пусть $f(a) = b \neq 0$. Если $\varphi\colon \Delta \to \Delta$ — автоморфизм, переводящий $b$ в $0$, то для отображения $g = \varphi \circ f$ имеем, ввиду предложения 9.4,

$$|g'(a)| = |f'(a)|/(1 - |b|^2) > |f'(a)|,$$

и получаем противоречие. □

**Лемма 9.6.** *В прежних обозначениях отображение $f$ является изоморфизмом $U$ на $\Delta$.*

*Доказательство.* Так как $f$ однолистно, нам надо только доказать, что $f(U)=\Delta$. Рассуждая от противного, пусть $b\in\Delta\setminus f(U)$. Пусть автоморфизм $\varphi\colon\Delta\to\Delta$ задан формулой $z\mapsto(z-b)/(1-\bar{b}z)$; тогда $\varphi(b)=0=\varphi^{-1}(-b)$. Положим $f_1=\varphi\circ f$; так как ввиду леммы 9.5 имеем $f(a)=0$, то $f_1(a)=-b$, а поскольку $b\notin f(U)$, то $0\notin f_1(U)$. Так как $U$ односвязно, таково же и изоморфное ему множество $f_1(U)$; поскольку это множество к тому же, как мы только что убедились, не содержит нуля, на нем определена однозначная (и, разумеется, однолистная!) ветвь квадратного корня $g\colon f_1(U)\to\mathbb{C}$; очевидно, $g(f_1(U))\subset\Delta$. Положим $f_2=g\circ f_1$. Наконец, сделаем так, чтобы $a$ снова переходило в нуль; для этого положим $f_3=\varphi^{-1}\circ f_2=\varphi^{-1}\circ g\circ\varphi\circ f$. Функция $f_3\colon U\to\Delta$ однолистна; подсчитаем $|f_3'(a)|$:

$$\begin{aligned}|f_3'(a)|&=|f'(a)|\cdot|\varphi'(0)|\cdot|g'(-b)|\cdot|\varphi'(g(b))|^{-1}=\\&=|f'(a)|\frac{1-|b|^2}{2\sqrt{|b|}(1-(\sqrt{|b|})^2)}=|f'(a)|\frac{1+|b|}{2\sqrt{|b|}}\end{aligned}$$

(при подсчете $|\varphi'(0)|$ мы воспользовались предложением 9.4, а при подсчете $|g'(-b)|$ — тем, что $(\sqrt{z})'=\pm1/2\sqrt{z}$). Поскольку $(1+|b|)/2\sqrt{|b|}>1$, получаем, что $|f_3'(a)|>|f'(a)|$ — противоречие. □

Итак, нам осталось обосновать «допущение». Нам понадобится важный факт, называемый принципом аргумента.

**Предложение 9.7.** *Пусть $D\subset\mathbb{C}$ — связная область с (кусочно)-гладкой границей и $f$ — непостоянная функция, голоморфная в окрестности $D$ и не имеющая нулей на $\partial D$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(z)dz}{f(z)}=\sum_{z\in\operatorname{int}D}\operatorname{ord}_z(f),\tag{9.1}$$

*где через $\operatorname{ord}_z(f)$ обозначается кратность $f$ в точке $z$ (кратность нуля, если $f(z)=0$, и нуль, если $f(z)\neq0$).*

*Доказательство.* Пусть $z_1,\dots,z_n$ — нули функции $f$ в $\operatorname{int}D$. Поместим каждый $z_i$ в замкнутый диск $D_i$, содержащийся в $\operatorname{int}D$ и не пересекающийся с остальными $D_j$. Из теоремы Коши следует, что левая часть (9.1) равна $\sum_{j=1}^n\int_{\partial D_j}df/f$. В окрестности $z_j$ функция $f$ записывается в виде $f(z)=(z-a_j)^{m_j}g(z)$, где $g$ голоморфна и $g(a_j)\neq0$, и $m_j=\operatorname{ord}_{a_j}(f)$. Имеем, очевидно,

$$\frac{df}{f}=\frac{m_j dz}{z-a_j}+\frac{g'(z)dz}{g(z)}.$$

Интеграл от первого слагаемого по $\partial D_j$ равен, очевидно, $2\pi i m_j$ (см. доказательство предложения 3.8), а от второго — нулю по теореме Коши (так как функция $g'/g$ голоморфна в окрестности $D_j$). Все доказано. □

**Замечание 9.8.** Утверждение предложения 9.7 можно усилить различными способами. Можно, например, предполагать, что $f$ не голоморфна, а всего лишь мероморфна в окрестности $D$, не имеет на $\partial D$ ни нулей, ни полюсов, и считать, что $\operatorname{ord}_z(f) = -m$, если $f$ имеет в точке $z$ полюс порядка $m$: формула (9.1) останется верной. Далее, если $h$ — другая функция, голоморфная в окрестности $D$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} h(z)\cdot\frac{f'(z)dz}{f(z)} = \sum_{z\in\operatorname{int}D}\operatorname{ord}_z(f)\cdot h(z).$$

Доказываются эти обобщения так же, как предложение 9.7.

**Замечание 9.9.** Геометрический смысл предложения 9.7 следующий. Пусть $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ — единичная окружность. Определим отображение $\tilde f\colon \partial D \to S^1$ по формуле $\tilde f(z) = f(z)/|f(z)|$. Тогда левая часть (9.1) равна $\deg\tilde f$ (точнее говоря, сумме степеней ограничений $\tilde f$ на компоненты $\partial D$). Выражаясь менее формально, левая часть (9.1) — это число оборотов, которое кривая $f(\partial D)$ делает вокруг нуля. Доказать все это можно, если заметить, что $df/f = d(\ln|f|) + i\tilde f^*(d\varphi)$, где $d\varphi$ — 1-форма на окружности «дифференциал от угла»; интеграл от второго слагаемого равен, очевидно $2\pi i\times$(число оборотов), а интеграл от первого слагаемого равен нулю по теореме Стокса (буквально ее применить нельзя, так как функция $z\mapsto\ln|f(z)|$ не является даже непрерывной в $\operatorname{int}D$, но нетрудно проверить, что это ничему не мешает).

Мы применим принцип аргумента следующим образом.

**Предложение 9.10.** *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций, голоморфных на открытом множестве $U\subset\mathbb{C}$, сходящаяся равномерно на компактах в $U$ к непостоянной функции $f\colon U\to\mathbb{C}$. Тогда если все функции $f_n$ однолистны, то и $f$ однолистна.*

*Доказательство.* Предположим противное: $f(z_1) = f(z_2) = a$. Тогда, легко видеть, что существует такая область с кусочно-гладкой границей $D\subset U$, что $z_1, z_2\in\operatorname{int}D$ и функция $f$ не принимает значения $a$ на $\partial D$ (легко построить такую $D$, граница которой является ломаной, а при желании можно эту границу и сгладить). Положим $g_i(z) = f_i(z) - a$, $g(z) = f(z) - a$. Из условия и предложения 2.8 ясно, что последовательность $g_n'/g_n$ сходится к $g'/g$ равномерно на $\partial D$; следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{g_n'(z)dz}{g_n(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{g'(z)dz}{g(z)}.$$

Так как $g(z_1) = g(z_2) = 0$, предложение 9.7 показывает, что правая часть этого равенства не меньше двух; так как все $f_j$ однолистны, то же предложение показывает, что в левой части все члены последовательности не превосходят единицы — противоречие! □

Теперь все готово для того, чтобы обосновать существование максимума $|f'(a)|$. Введем следующие определения.

**Определение 9.11.** Обозначим через $H(U)$ множество голоморфных функций на $U$. Подмножество $F \subset H(U)$ будем называть *замкнутым*, если для всякой последовательности функций $f_n \in F$, равномерно сходящейся на компактах в $U$ к функции $f \in H(U)$, имеем $f \in F$.

Подмножество $C \subset H(U)$ называется *компактным*, если у всякой последовательности функций $f_n \in C$ существует подпоследовательность, равномерно сходящаяся на компактах в $U$ к функции $f \in C$.

Отображение $\Phi\colon C \to \mathbb{C}$, где $C \subset H(U)$, называется *непрерывным*, если для всякой последовательности функций $f_n \in C$, равномерно сходящейся на компактах в $U$ к функции $f \in C$, имеем $\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n) = \Phi(f)$.

**Замечание 9.12.** На $H(U)$ можно ввести метризуемую топологию, относительно которой последовательность функций $f_n$ сходится тогда и только тогда, когда когда она равномерно сходится на компактах в $U$. Эта топология индуцирована «компактно-открытой топологией» на пространстве непрерывных отображений из $U$ в $\mathbb{C}$.

Доказательства следующих двух предложений стандартны.

**Предложение 9.13.** *Замкнутое подмножество в компактном множестве является компактным.* $\square$

**Предложение 9.14.** *Пусть $C \subset H(U)$ — компактное подмножество и $\Phi\colon C \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение. Тогда обображение $\Phi$ достигает наибольшего значения для некоторой функции $f \in C$.* $\square$

Пусть теперь $U \subset \Delta$ — открытое множество, $a \in U$ и $C \subset H(U)$ — множество таких однолистных голоморфных отображений из $U$ в $\Delta$, что $|f'(a)| \geqslant 1$. Так как $U \subset \Delta$, это множество непусто, а из предложения 9.10 следует, что $C \subset H(U)$ замкнуто; из предложения 2.8 следует, что отображение $\Phi\colon C \to \mathbb{R}$, заданное формулой $\Phi(f) = |f'(a)|$, непрерывно. Стало быть, ввиду предложения 9.14, для того, чтобы обосновать наше допущение, достаточно показать, что множество $C \subset H(U)$ компактно. Ввиду предложения 9.13 это вытекает из следующей теоремы:

**Теорема 9.15 (теорема Монтеля).** *Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $M > 0$. Тогда множество*

$$\{\, f \in H(U) \mid \sup_{z\in U} |f(z)| \leqslant M \,\}$$

*компактно в $H(U)$.*

*Доказательство.* Мы воспользуемся следующим результатом из оснований анализа.

**Предложение 9.16 (теорема Арцела́).** *Пусть $(X, \rho)$ — компактное метрическое пространство и $C(X)$ — пространство непрерывных функций на $X$ с* sup-*нормой. Для того, чтобы замкнутое подмножество $C \subset C(X)$ было компактно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

(1) *Существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех $f \in C$ и $x \in X$ («равномерная ограниченность»).*

(2) *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $\rho(x, x') < \delta$, где $x, x' \in X$, следует неравенство $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ для всех $f \in C$ («равностепенная непрерывность»).* □

Теперь перейдем к доказательству теоремы Монтеля. Легко видеть, что можно выбрать последовательность компактных подмножеств $K_i \subset U$, обладающую тем свойством, что $K_i \subset \operatorname{int} K_{i+1}$ для всех $i$ и $\bigcup_i K_i = U$. Пусть $C_i \subset C(K_i)$ — множество ограничений функций из $C$ на $K_i$. Покажем, что всякое $C_i$ компактно в $C(K_i)$. Ввиду условия и теоремы Арцела достаточно проверить равностепенную непрерывность. Далее, поскольку $K_i$ можно покрыть конечным числом замкнутых дисков произвольно малого радиуса, содержащихся в $U$, достаточно установить равностепенную непрерывность на каждом таком диске $D \subset U$. Пусть $\gamma$ — окружность, концентрическая с $D$, имеющая бо́льший радиус и содержащаяся в $U$. Тогда для $z \in D$ имеем, по теореме Коши,

$$\left|f'(z)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2}\right| \leqslant \frac{MR}{(R-r)^2},$$

где $r$ и $R$ — радиусы $D$ и $\gamma$ соответственно. Значит, модули производных функций из $C$ равномерно ограничены в $D$ некоторой константой $M_1$. Если теперь $z_1, z_2 \in D$ и $f \in C$, то $|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant M_1|z_1 - z_2|$, откуда равностепенная непрерывность очевидна.

Пусть теперь $\{f_n\}$ — последовательность функций из $C$. Ввиду доказанного из нее можно выбрать равномерно сходящуюся на $K_1$ подпоследовательность $f_{11}, f_{12}, \ldots$; из этой последовательности можно выбрать равномерно сходящуюся на $K_2$ подпоследовательность $f_{21}, f_{22}, \ldots$, и т. д.: каждая последовательность $\{f_{(m+1),j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ равномерно сходится на $K_{m+1}$ и является подпоследовательностью в $\{f_{mj}\}_{j\in\mathbb{N}}$. Тогда диагональная последовательность $f_{11}, f_{22}, \ldots$ равномерно сходится на каждом $K_m$ (поскольку начиная с $f_{mm}$ она является подпоследовательностью в $\{f_{mj}\}_{j\in\mathbb{N}}$), а значит и на любом компакте в $U$. Это завершает доказательство теоремы Монтеля, а с ней — и теоремы Римана. □