Теория функций комплексного переменного, весна 2002. Экзамен 26 мая 2002

Критерии оценок будут сформулированы после проверки, но для получения оценки «отлично» заведомо не обязательно решить все задачи.

1. Функция f непрерывна на замкнутом круге $D = \{z \mid |z| \leqslant 1\}$ и голоморфна в его внутренности. Дано, что все значения f на границе круга вещественны. Докажите, что f — константа.

2. Пусть $L \subset \mathbb{C}$ — решетка, порожденная числами 1 и τ, где $\operatorname{Im} \tau \neq 0$, и пусть $\wp$ — соответствующая функция Вейерштрасса. Дано, что $\wp(1/2) = 0$. Запишите в явном виде уравнение какой-нибудь алгебраической функции, риманова поверхность которой изоморфна эллиптической кривой $\mathbb{C}/L$.

3. Найдите нули и полюса (с кратностями) мероморфной формы $z\,dz/w$ на римановой поверхности алгебраической функции, заданной уравнением $z^5 + w^5 = 1$.

4. Пусть $U = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Опишите автоморфизмы области U.

5. f и g — целые функции, не являющиеся константами и удовлетворяющие тождеству $(f(z))^2 + (g(z))^2 = 1$. Докажите, что существует такая точка $z \in \mathbb{C}$, что $f(z) = 1$ и $g(z) = 0$.

6. Конечна или бесконечна площадь в гиперболической метрике открытого множества $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\}$?

7. $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ — голоморфная, однолистная и ограниченная функция в единичном круге. Докажите, что $|a_n| = o(1/\sqrt{n})$.