ТФКП, весна 2002, листок 2

Функции голоморфные и не очень

Если не оговорено противное, через U будет обозначаться открытое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

1. Пусть $f\colon U \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция. Выразите ее якобиан в точке $z \in U$ через $f'(z)$.

2. Пусть $f\colon U \to \mathbb{C}$ — гладкое отображение (не предполагаемое голоморфным). Выразите ее якобиан через $\partial f/\partial z$ и $\partial f/\partial \overline{z}$.

Будем называть *сжатием* эллипса с полуосями a и b (где $a > b$) число $(a-b)/(a+b)$.

3. Пусть $f\colon U \to \mathbb{C}$ — сохраняющее ориентацию гладкое отображение (не предполагаемое голоморфным) с невырожденной производной. Его производная переводит окружности в эллипсы. Выразите сжатие получающихся эллипсов через $\partial f/\partial z$ и $\partial f/\partial \overline{z}$.

4. В условиях предыдущей задачи выразите через $\partial f/\partial z$ и $\partial f/\partial \overline{z}$ угол, образуемый большой полуосью эллипса с действительной осью.

5. Приведите пример функции, непрерывной на окружности и не продолжающейся до функции, непрерывной в круге и голоморфной в его внутренности [указание: таких много].

6. Гладкая функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ называется *гармонической*, если локально она является вещественной частью голоморфной функции. Докажите, что f гармонична тогда и только тогда, когда она удовлетворяет «уравнению Лапласа»
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

7. Гладкие функции $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ называются *гармонически сопряженными*, если функция $f + ig$ голоморфна. Докажите, что для всякой гармонической функции $f\colon U \to \mathbb{R}$ и точки $z \in U$ существует окрестность $U' \ni z$ и функция $g\colon U' \to \mathbb{R}$, гармонически сопряженная к f в U' (иными словами, гармонически сопряженная функция всегда существует локально).

8. Приведите пример открытого множествоа U и гармонической функции $f\colon U \to \mathbb{R}$, для которой не существует гармонически сопряженной функции на всем U.

9. Пусть функция f гармонична в окрестности замкнутого диска с центорм a и радиусом r. Покажите, что

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta$$

(«значение гармонической функции в центре круга равно среднему от ее значений на окружности»). [Указание: примените формулу Коши.]

10. Пусть открытое множество $U \subset \mathbb{C}$ связно и $a \in U$. Предположим, что последовательность голоморфных в U функций $\{f_n\}$ удовлетворяет следующим условиям: $f_n(a) = 0$ для всех n, и последовательность $\{\mathrm{Re}(f_n)\}$ сходится в U равномерно на компактах. Докажите, что последовательность $\{f_n\}$ сходится в U равномерно на компактах. До какой степени можно ослабить условие $f_n(a) = 0$?