ТФКП, весна 2002, листок 3

Локальные свойства

Задачи на локальные свойства голоморфных функций чем-то похожи на задачи по планиметрии: их тоже очень много, и среди них тоже много непростых. Не огорчайтесь, если что-то не получится.

1. Пусть f — целая функция, не являющаяся постоянной. Положим $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Докажите, что $\lim_{r\to+\infty} M(r) = +\infty$.

2. Точки $P_1, \ldots, P_n$ лежат вне круга, ограниченного окружностью с центром в точке O. Докажите, что на этой окружности существует точка, для которой произведение расстояний до точек $P_1, \ldots, P_n$ больше, чем $OP_1 \cdot \ldots \cdot OP_n$, а также точка, для которой это произведение меньше, чем $OP_1 \cdot \ldots \cdot OP_n$.

3. Пусть функция f голоморфна в единичном круге $\Delta = \{z \mid |z| < 1\}$, причем для всех $z \in \Delta$ выполнено тождество

$$(\operatorname{Re} f(z))^2 + 4(\operatorname{Im} f(z))^2 = 1.$$

Докажите, что f — константа.

4. Докажите, что открытые множества $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\}$ и $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, 3\}$ неизоморфны.

5. Пусть f — целая функция, не являющаяся многочленом. Положим $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Докажите, что

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} = +\infty.$$

6. Пусть P — многочлен степени n от одной переменной с комплексными коэффициентами. Положим $M(r) = \max_{|z|=r} |P(z)|$. Докажите, что функция $r \mapsto M(r)/r^n$ монотонно убывает на $(0; +\infty)$. [Указание: принцип максимума.]

7. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$, и пусть непостоянная функция $f\colon D \to \mathbb{C}$ непрерывна в D, голоморфна в $\operatorname{int} D$, и $|f(z)| = 1$ для всех $z \in \partial D$. Докажите, что функция f имеет нуль в $\operatorname{int} D$.

8. Пусть функции f, g и h голоморфны и непостоянны на связном открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$. Докажите, что функция

$$z \mapsto |f(z)| + |g(z)| + |h(z)|$$

не может иметь в U локального максимума. [Указание: если сразу не выйдет, попробуйте вернуться к этой задаче после задачи 9.]

9. Пусть функция f непрерывна в диске $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ и голоморфна в его внутренности. Покажите, что

$$|f(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|\, d\theta.$$

[Указание: вспомните «теорему о среднем» (задача 9 из листка 2).]

10. Пусть $\Delta = \{z \mid |z| < 1\}$ и $\mathcal{M}$ — множество всех голоморфных отображений $f\colon \Delta \to \Delta$, для которых $f(0) = 2/3$ (не обязательно сюръективных). Найти $\sup_{f \in \mathcal{M}} |f'(0)|$. [Указание: вам поможет лемма Шварца.]

11. Докажите, что не существует функции f, голоморфной в единичном круге $\Delta = \{z \mid |z| < 1\}$ и обладающей следующими свойствами: $|f(z)| < 1$ для всех $z \in \Delta$, $f(0) = 1/2$, $f(1/2) = 7/8$.

12. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$, и пусть непостоянная функция $f\colon D \to \mathbb{C}$ непрерывна в D и голоморфна в $\operatorname{int} D$. Предположим, что f обращается в нуль в точках $a_1, \ldots, a_n \in \operatorname{int} D$ (не обязательно только в них). Докажите, что

$$|f(0)| \leqslant \max_{z \in D} |f(z)| \cdot \prod_{j=1}^{n} |a_j|.$$

13. Пусть функция f голоморфна и ограничена в круге $\Delta = \{z \mid |z| < 1\}$. Докажите, что множество ее нулей в Δ не может состоять из всевозможных чисел вида $n/(n+1)$, где n — целое положительное число. [Указание: см. задачу 12.]

14. (Для знакомых с рядами Фурье.) Пусть $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ и $f\colon \partial\Delta \to \mathbb{C}$ — непрерывная функция. Докажите, что f продолжается до функции, непрерывной на Δ и голоморфной в $\operatorname{int} \Delta$, тогда и тогда, когда $\int_{\partial\Delta} z^n f(z)\, dz = 0$ при всех целых $n \geqslant 0$. [Указание: помимо рядов Фурье, надо будет воспользоваться принципом максимума.]

Поздравляем девушек с наступающим 8 марта!