ТФКП, весна 2002, листок 4

Римановы поверхности; эллиптические функции

1. Докажите, что всякое голоморфное отображение из $\overline{\mathbb{C}}$ в эллиптическую кривую является константой. [У этой задачи есть по крайней мере два простых решения: с помощью формулы Римана–Гурвица и без оной. Постарайтесь найти оба.]

2. Пусть на компактной римановой поверхности X существует мероморфная функция с ровно одним, и притом простым, полюсом. Покажите, что X изоморфна $\overline{\mathbb{C}}$.

3. Найдите род римановой поверхности, соответствующей уравнению $w^2 = P(z)$, гда P — многочлен степени n без кратных корней. (Такие римановы поверхности называются *гиперэллиптическими*; в роде > 2 большинство римановых поверхностей гиперэллиптическими не являются.)

4. На римановой поверхности из задачи 3 функция w является мероморфной; найдите ее нули и полюса (вместе с их кратностями).

5. Постройте на гипреэллиптической римановой поверхности рода g (см. задачу 3) g штук линейно независимых голоморфных форм. (На самом деле на всякой компактной римановой поверхности рода g существуют g, и не более того, линейно независимых голоморфных форм.)

6. Пусть f — мероморфная функция на компактной римановой поверхности X. Докажите, что сумма кратностей ее нулей равна сумме кратностей ее полюсов.

7. Найдите род римановой поверхности, соответствующей уравнению $z^n + w^n = 1$. (На самом деле таков будет род любой римановой поверхности, соответствующей уравнению $F(z, w) = 0$, где F — «многочлен общего положения» степени n; можете попробовать это доказать.)

8*. Пусть $P \in \mathbb{C}[z, w]$ — неприводимый многочлен и $X \subset \mathbb{C}^2$ — множество таких точек (z, w), что $P(z, w) = 0$ и хотя бы одна из частных производных многочлена P отлична от нуля в этой точке. Тогда X является (некомпактной) связной римановой поверхностью. Докажите, что всякая ограниченная голоморфная функция на X является константой.

9. Покажите, что ряд

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z-n)} + \frac{1}{n}\right)$$

сходится к мероморфной функции на $\mathbb{C}$ с полюсами в точках из $\mathbb{Z}$.

10. Покажите, что функция f из задачи 9 нечетна и имеет период 1, а разность $f(z) - \pi \operatorname{ctg} \pi z$ ограничена, и выведите отсюда, что $f(z) = \pi \operatorname{ctg} \pi z$.

11. Найдите решение «уравнения физического маятника» $\ddot{x} + \sin x = 0$ с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \varphi$ [Указание: вспомните закон сохранения энергии.]

12. Какие эллиптические кривые имеют нетривиальный автоморфизм, сохраниющий точку 0 (нетривиальный — это значит «отличный от $z \mapsto -z$»).

13. Найдите j-инвариант эллиптической кривой, являющейся фактором $\mathbb{C}$ по квадратной решетке. [Указание: не пытайтесь считать в лоб!]

14. Найдите j-инвариант эллиптической кривой, являющейся фактором $\mathbb{C}$ по решетке, порожденной 1 и $e^{\pi i/3}$.