# ТФКП, весна 2002, листок 5

## Римановы поверхности; принцип аргумента

**1.** Пусть $\omega_1$ и $\omega_2$ — голоморфные формы на компактной римановой поверхности, не равные тождественно нулю. Докажите, что сумма кратностей нулей у формы $\omega_1$ — такая же, как у формы $\omega_2$.

**2.** Докажите, что пространство голоморфных 1-форм на компактной римановой поверхности конечномерно.

**3.** Докажите, что на сфере Римана нет ненулевых голоморфных форм.

**4*.** Докажите, что сумма кратностей нулей голоморфной формы на компактной римановой поверхности рода $g$ зависит только от $g$, и найдите эту зависимость. (Вы можете пользоваться тем, что на компактной римановой поверхности существует непостоянная мероморфная функция.)

**5.** Докажите, что эллиптическая кривая изоморфна фактору $\mathbb{C}$ по прямоугольной решетке тогда и только тогда, когда она является римановой поверхностью уравнения $w^2 = P(z)$, где $P$ — многочлен третьей степени с тремя различными вещественными корнями.

**6.** Постройте конформное отображение прямоугольника на верхнюю полуплоскость (указание: воспользуйтесь $\wp$-функцией).

**7.** Пусть функции $f$ и $g$ непрерывны на ограниченной области $D$ с кусочно-гладкой границей и голоморфны в ее внутренности. Пердположим, что при всех $z \in \partial D$ выполнено неравенство $|f(z)| > |g(z)|$. Докажите, что функции $f$ и $f+g$ имеют (с учетом кратности) одинаковое количество нулей во внутренности $D$.

**8.** Пусть $X$ — эллиптическая кривая, и пусть функция $f$, мероморфная на $X$, имеет на ней нули $a_1, \ldots, a_n$ и полюсы $b_1, \ldots, b_n$ (каждый нуль или полюс повторен столько раз, какова его кратность). Докажите, что

$$a_1 + \ldots + a_n - b_1 - \ldots - b_n = 0$$

(сложение — в смысле групповой операции на эллиптической кривой). [Указание: проинтегрируйте $zdf/f$ по подходящему контуру на плоскости.]

**9.** Докажите, что на эллиптическкой кривой существует мероморфная функция, имеющая нули $a_1, \ldots, a_n$ с кратностями $p_1, \ldots, p_n$ и полюсы $b_1, \ldots, b_m$ с кратностями $q_1, \ldots, q_m$ (и не имеющая других нулей и полюсов) тогда и только тогда, когда $p_1 + \ldots + p_n = q_1 + \ldots + q_m$ и $p_1 a_1 + \ldots + p_n a_n = q_1 b_1 + \ldots + q_m b_m$.