Линейный функциональный анализ

Лекция 1.

Вначале познакомимся с языком категорий, который (как и язык теории множеств) очень удобен практически в любой области математики.

Категории.

Определение 1. Говорят, что задана *категория* $\mathscr{C}$, если:

1) Задан класс $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ (элементы которого называются *объектами* $\mathscr{C}$);

2) Для каждой пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ задано множество $\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ (элементы которого называются *морфизмами* из X в Y). В дальнейшем вместо $\varphi \in \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ мы иногда будем писать $\varphi\colon X \to Y$ или $X \xrightarrow{\varphi} Y$;

3) Для каждых $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ задано отображение

$$\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(Y,Z) \times \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X,Y) \to \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X,Z).$$

Образ пары (ψ,φ) при этом отображении обозначается $\psi \circ \varphi$ и называется *композицией* ψ и φ.

При этом требуется, чтобы закон композиции морфизмов обладал следующими свойствами:

(i) Для любых морфизмов $X \xrightarrow{\varphi} Y$, $Y \xrightarrow{\psi} Z$ и $Z \xrightarrow{\chi} W$ выполнено соотношение $(\chi \circ \psi) \circ \varphi = \chi \circ (\psi \circ \varphi)$;

(ii) Для каждого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ существует морфизм $\mathbf{1}_X$ (называемый *локальной единицей* или *тождественным морфизмом*), такой, что для любых $\varphi\colon X \to Y$ и $\psi\colon Y \to X$ выполнено $\varphi \circ \mathbf{1}_X = \varphi$ и $\mathbf{1}_X \circ \psi = \psi$.

Упражнение 1. Доказать единственность локальной единицы.

Приведем теперь несколько примеров категорий, типичных для тех или иных областей математики. Вначале, как водится — «глупый» пример.

Пример 1. Любой класс становится категорией, если положить $\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X,Y) = \varnothing$ для различных X, Y и $\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X,X) = \{\mathbf{1}_X\}$.

Базовый пример (как Вы уже догадались) такой:

Пример 2. Категория множеств $\mathcal{S}et$. Ее объекты — множества, морфизмы — отображения, композиция — обычная композиция отображений, локальная единица — тождественное отображение.

Прежде чем приводить другие примеры, введем еще одно понятие.

При составлении конспекта существенно использованы неопубликованные записки лекций А. Я. Хелемского «Лекции и упражнения по функциональному анализу» (с согласия автора).

Определение 2. Категория $\mathscr{A}$ называется *подкатегорией* категории $\mathscr{B}$, если $\operatorname{Ob}\mathscr{A} \subset \operatorname{Ob}\mathscr{B}$, для любых $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathscr{A}$ выполнено $\mathbf{h}_{\mathscr{A}}(X,Y) \subset \mathbf{h}_{\mathscr{B}}(X,Y)$, и закон композиции (а также локальные единицы) в $\mathscr{A}$ — те же, что в $\mathscr{B}$. Если, к тому же, $\mathbf{h}_{\mathscr{A}}(X,Y) = \mathbf{h}_{\mathscr{B}}(X,Y)$ для любых $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathscr{A}$, то говорят, что $\mathscr{A}$ — *полная* подкатегория.

Много содержательных примеров категорий можно получить, если в качестве объектов брать множества с какой-нибудь дополнительной структурой, а в качестве морфизмов — отображения, уважающие эту структуру. Как утверждают Бурбаки (см. их статью «Архитектура математики»), основные (первичные) структуры — это алгебраические и топологические, а остальные (более сложные) получаются из них. Так что начнем с алгебраических.

Пример 3. Категория $\mathscr{L}in$ линейных пространств (над каким-либо фиксированным полем). Объекты — линейные пространства, морфизмы — линейные отображения (они же — операторы).

Замечание 1. Строго говоря, $\mathscr{L}in$ не является подкатегорией в $\mathcal{S}et$: ведь линейное пространство — это тройка (множество и два отображения — сложение и умножение на скаляр). **!**

Пример 4. Полная подкатегория $\mathscr{F}\mathscr{L}in \subset \mathscr{L}in$, состоящая из конечномерных пространств.

Пример 5. Категория $\mathscr{G}r$ групп. Объекты — группы, морфизмы — гомоморфизмы групп.

Пример 6. Полная подкатегория $\mathscr{A}b \subset \mathscr{G}r$, состоящая из абелевых групп.

Пример 7. Категория $\mathscr{R}ing$ (ассоциативных) колец; категория $\mathscr{A}lg_k$ (ассоциативных же) алгебр над полем k; категория R-mod модулей над кольцом R; категория G-$\mathcal{S}et$ множеств, снабженных действием группы $G \ldots$ (морфизмы опишите сами).

Перейдем теперь от «демона абстрактной алгебры» к «ангелу топологии».

Пример 8. Категория $\mathscr{T}op$ топологических пространств и непрерывных отображений.

Пример 9. Ее полная подкатегория $\mathscr{H}\mathscr{T}op$, состоящая из хаусдорфовых пространств.

Пример 10. Категория $\mathscr{M}etr$ метрических пространств и непрерывных отображений (не являющаяся, кстати, подкатегорией в $\mathscr{H}\mathscr{T}op$ — почему?)

Можно получить и другие (не менее важные) примеры категорий метрических пространств, если несколько сузить класс морфизмов (так, чтобы они уважали не только топологию, но и метрику).

Определение 3. Отображение $f\colon (X,\rho) \to (Y,\rho)$ метрических пространств называется *сжатием*[1], если $\rho\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \rho(x,y)$.

[1]Не путать с понятием сжимающего отображения!

Разумеется, всякое сжатие непрерывно, но не наоборот.

Пример 11. Подкатегория (неполная!) $\mathscr{M}etr_1 \subset \mathscr{M}etr$. Объекты — те же, что в $\mathscr{M}etr$, морфизмы — сжатия.

Пример 12. Категория $\mathscr{D}iff$ гладких многообразий и гладких отображений.

Помимо категорий множеств со структурой, есть примеры и другого рода.

Пример 13. Категория $\mathscr{T}op_h$. Объекты — топологические пространства, морфизмы — гомотопические классы непрерывных отображений. (Почему закон композиции здесь определен корректно?)

Пример 14. Любое частично упорядоченное множество $(I, \prec)$ можно превратить в категорию, положив $\mathbf{h}_I(i,j) = \{*\}$ (одноэлементное множество), если $i \prec j$, и $\mathbf{h}_I(i,j) = \varnothing$ иначе. Закон композиции здесь определяется единственно возможным способом.

Пример 15. У предыдущего примера есть важный частный случай: категория $\mathrm{Open}(X)$ открытых подмножеств топологического пространства X. Отношение порядка здесь, конечно — обычное теоретико-множественное включение "$\subset$". (Важность этого примера станет ясна потом, когда мы будем говорить о функторах.)

Под *диаграммой* $\mathscr{D}$ в категории $\mathscr{C}$ понимают произвольный набор объектов из $\mathscr{C}$ и морфизмов между ними. Если $\mathscr{D}$ — диаграмма в $\mathscr{C}$, а X, Y — объекты из $\mathscr{D}$, то *путем* $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ из X в Y называют конечную цепочку морфизмов вида $X \xrightarrow{\varphi_1} Z_1$, $Z_1 \xrightarrow{\varphi_2} Z_2$, ..., $Z_{n-1} \xrightarrow{\varphi_n} Y$ (где все объекты и морфизмы лежат в $\mathscr{D}$). Диаграмма $\mathscr{D}$ называется *коммутативной*, если для любых $X, Y \in \mathscr{D}$ и любых путей $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ и $(\psi_1, \dots, \psi_m)$ из X в Y (в $\mathscr{D}$) выполнено $\varphi_n \circ \ldots \circ \varphi_1 = \psi_m \circ \ldots \circ \psi_1$. Например, коммутативность квадрата

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y_2 \end{array}$$

означает просто, что $\beta \circ f_1 = f_2 \circ \alpha$. (Конечно, последняя формула занимает меньше места, чем картинка, но картинка как-то нагляднее ...)

Пример 16. *Цепным комплексом* линейных пространств называется бесконечная в обе стороны последовательность $X_\bullet = \{(X_n, d_n); n \in \mathbb{Z}\}$ линейных пространств и линейных отображений

$$\cdots \leftarrow X_{n-1} \xleftarrow{d_{n-1}} X_n \xleftarrow{d_n} X_{n+1} \leftarrow \cdots,$$

удовлетворяющих условию $d_{n-1} \circ d_n = 0$ для любого n. (Иногда опускают индекс n и пишут просто $d^2 = 0$.) *Морфизмом* $\varphi_\bullet \colon X_\bullet \to Y_\bullet$ цепных комплексов называется набор линейных отображений $\{\varphi_n \colon X_n \to Y_n\}$, таких, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\cdots & X_{n-1} \arrow[l] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"'] & X_n \arrow[l, "d_{n-1}"'] \arrow[d, "\varphi_n"'] & X_{n+1} \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"'] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & Y_{n-1} \arrow[l] & Y_n \arrow[l, "d_{n-1}"'] & Y_{n+1} \arrow[l, "d_n"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Ясно, что цепные комплексы образуют категорию; она обозначается $\mathbf{C}_\bullet(\mathscr{L}in)$.

(Разумеется, вместо $\mathscr{L}in$ здесь можно было взять любую другую категорию, в которой имеет смысл понятие нулевого морфизма — например, $\mathscr{A}b$ или даже саму $\mathbf{C}_\bullet(\mathscr{L}in)$. О нулевых объектах и морфизмах мы еще поговорим попозже.)

Иногда бывает удобно рассматривать комплексы, стрелки в которых смотрят в направлении возрастания (а не убывания, как было выше) индекса n (помните комплекс де Рама?) Такие комплексы называются *коцепными*; их морфизмы определяются очевидным образом. Вообще «обращение стрелок» — достаточно распространенный в математике прием, часто позволяющий сэкономить половину места. Он основан на использовании следующего понятия.

Определение 4. Для каждой категории $\mathscr{C}$ ее *дуальная категория* $\mathscr{C}^\circ$ определяется так: $\operatorname{Ob}\mathscr{C}^\circ = \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ и $\mathbf{h}_{\mathscr{C}^\circ}(X,Y) = \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(Y,X)$. Композиция морфизмов в $\mathscr{C}^\circ$ — это композиция морфизмов в $\mathscr{C}$, взятых в обратном порядке.

Пример 17. Категорию *коцепных комплексов* линейных пространств можно определить так: $\mathbf{C}^\bullet(\mathscr{L}in) := \big(\mathbf{C}_\bullet(\mathscr{L}in^\circ)\big)^\circ$.

Пример 18. Пусть X — фиксированный объект категории $\mathscr{C}$. Категория $\mathscr{C}_X$ *объектов над* X состоит из пар (Y,φ), где $Y \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ и $\varphi \in \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(Y,X)$. Морфизм из (Y,φ_1) в (Y_2,φ_2) в этой категории — это морфизм $f \colon Y_1 \to Y_2$ в $\mathscr{C}$, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & & Y_2 \arrow[dl, "\varphi_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

коммутативной. В частности, если X — топологическое пространство, то определена категория $\mathscr{T}op_X$. В ней есть важная подкатегория $\mathscr{C}ov_X$, состоящая из *накрытий* пространства X.

Пример 19. Обращая в предыдущем примере стрелки φ_1 и φ_2, получаем категорию $\mathscr{C}^X$. Формально, $\mathscr{C}^X = \big((\mathscr{C}^\circ)_X\big)^\circ$. Важный частный случай — категория $\mathscr{F}ield_k$, состоящая из расширений заданного поля k. (Кстати, какие в этой категории морфизмы?)

Познакомимся теперь с категориями, с которыми нам предстоит иметь дело.

Категории нормированных пространств.

Предупреждение. В дальнейшем все векторные пространства будут по умолчанию рассматриваться над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел (хотя многое будет верно и для $\mathbb{R}$).

Определение 5. *Преднормой* (или *полунормой*) на векторном пространстве X называется функция $p\colon X \to [0, +\infty)$ (всюду ниже мы будем писать $\|x\|$ вместо $p(x)$), обладающая следующими свойствами:

1) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ для любых $\lambda \in \mathbb{C}$ и $x \in X$;

2) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in X$ (*неравенство треугольника*).

Преднорма $\|\cdot\|$ называется *нормой*, если она удовлетворяет условию

3) $\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$.

Векторное пространство, снабженное (пред)нормой, называется *(пред)нормированным пространством.*

Замечание 2. Из аксиомы 1) следует равенство $\|0\| = 0$, так что импликацию "$\Rightarrow$" в 3) можно заменить на "$\iff$".

Если $\|\cdot\|$ — норма на X, то формула $\rho(x, y) = \|x-y\|$ задает метрику на X (проверьте!) Поэтому каждое нормированное пространство является метрическим (а каждое преднормированное — предметрическим) и, в частности, обладает естественной топологией.

Если мы хотим определить категорию, объектами которой служат нормированные пространства, в качестве морфизмов естественно брать те линейные отображения (=линейные операторы), которые как-то согласованы с нормой.

Предложение 1. *Пусть X и Y — нормированные пространства. Следующие свойства линейного оператора $T\colon X \to Y$ эквивалентны:*

1) $\sup\{\|Tx\| \,;\, \|x\| \leqslant 1\} < \infty$*;*

2) Существует $C > 0$, такое, что $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ для всех $x \in X$.

Если T таков, то

$$\sup\{\|Tx\| \,;\, \|x\| \leqslant 1\} = \inf\{C > 0 \,;\, \|Tx\| \leqslant C\|x\| \quad \forall\, x \in E\} \tag{1}$$

Доказательство легко следует из линейности T и из того факта, что для любого ненулевого $x \in X$ «отнормированный» вектор $\frac{x}{\|x\|}$ имеет норму 1.

Упражнение 2. Докажите, что это предложение верно и для преднормированных пространств.

Определение 6. Оператор T, обладающий указанными в предложении свойствами, называется ***ограниченным***, а число, определяемое формулой (1) — его ***нормой***; оно обозначается через $\|T\|$.

Говоря неформально, норма оператора — это наименьшее число раз, в которое оператору разрешается растягивать векторы. В частности, $\|Tx\| \leqslant \|T\|\|x\|$ для всех x.

Упражнение 3. Докажите, что $\|T\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$.

Упражнение 4. Линейный оператор между нормированными пространствами ограничен тогда и только тогда, когда он переводит ограниченные множества в ограниченные. (Как следствие, композиция ограниченных операторов — тоже ограниченный оператор.)

Множество ограниченных линейных операторов из X в Y обозначается через $\mathscr{B}(X, Y)$.

Предложение 2. *Если $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ и $S \in \mathscr{B}(Y, Z)$, то $S \circ T \in \mathscr{B}(X, Z)$, и $\|S \circ T\| \leqslant \|S\|\|T\|$.*

Последнее предложение дает нам возможность определить следующие два «сообщества»:

- Категория $\mathscr{N}orm$. Объекты — нормированные пространства, морфизмы — ограниченные линейные операторы.
- Категория $\mathscr{N}orm_1$. Объекты — те же, морфизмы — линейные *сжатия*, т.е. ограниченные линейные операторы, норма которых не превосходит 1 (ср. пример 11).

Где об этом почитать. Основные сведения о категориях есть, например, в книге Кириллова и Гвишиани «Теоремы и задачи функционального анализа», у Кострикина и Манина («Линейная алгебра и геометрия»), Ленга («Алгебра») и во многих книжках по алгебраической топологии. Очень хорошее введение — добавление к книге Манина «Лекции по алгебраической геометрии, часть I». Более подробно о категориях написано у Гельфанда и Манина («Методы гомологической алгебры»), Цаленко и Шульгейфера («Основы теории категорий») и Букура и Деляну («Введение в теорию категорий и функторов»). Самая содержательная книжка о категориях (увы, так и не переведенная на русский) — S. MacLane, “Categories for the working mathematician”.