Линейный функциональный анализ

Лекция 10.
Пространства интегрируемых функций.

В прошлый раз мы начали строить теорию интегрирования на компактном пространстве X. Исходными данными у нас были компакт X и положительный линейный функционал (интеграл) $I \in C(X)^*$. (Напомним, что базовый пример таков: $X = [a, b]$ — отрезок, I — интеграл Римана.) Вначале мы ограничили I на подмножество $C(X)_{\geqslant 0}$, состоящее из неотрицательных функций, затем доопределили его на неотрицательных полунепрерывных снизу функциях (позволив ему принимать значение $+\infty$), и, наконец, продолжили наш интеграл на множество $[0, \infty]^X$ *всех* неотрицательных функций на X (принимающих также и бесконечные значения). Получилась следующая картинка:

$$\begin{tikzcd}
C(X)_{\geqslant 0} \arrow[r, hook] \arrow[dr, "I"'] & \Phi(X) \arrow[r, hook] \arrow[d, "I'"] & {[0,\infty]^X} \arrow[dl, "I''"] \\
& {[0,\infty]} &
\end{tikzcd}$$

Напомним, что интегралы I' и I'' обладают свойствами однородности (т.е. положительные скаляры можно выносить за знак интеграла) и монотонности (если $f \leqslant g$, то и $I''(f) \leqslant I''(g)$; аналогично для I'). Кроме того, I' аддитивен (т.е. $I'(f+g) = I'(f)+I'(g)$), I'' субаддитивен (т.е. $I''(f+g) \leqslant I''(f) + I''(g)$), и для I'' справедлива теорема о монотонной сходимости ($f_n \uparrow f \Rightarrow I(f_n) \to I(f)$).

В дальнейшем нам пригодится следующее

Упражнение 1. $|I''(f_1) - I''(f_2)| \leqslant I''(|f_1 - f_2|)$ для любых $f_1, f_2 \in [0, \infty)^X$.

Если мы хотим назвать какую-либо функцию интегрируемой, то естественно потребовать, чтобы интеграл от нее был (как минимум) конечен. Это приводит к следующему определению.

Определение 1. Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Определим пространство $\mathscr{F}^p = \mathscr{F}^p(X, I)$ следующим образом:

$$\mathscr{F}^p = \{f \in \mathbb{C}^X \ : \ I''(|f|^p) < \infty\}.$$

Упражнение 2. Докажите следующие свойства $\mathscr{F}^p$:

1) $\mathscr{F}^p$ — векторное подпространство в $\mathbb{C}^X$;

2) $C(X) \subset \mathscr{F}^p$;

3) Функция $\|\cdot\|_p \colon \mathscr{F}^p \to [0, \infty)$, $\|f\|_p = I''(|f|^p)^{1/p}$ — преднорма на $\mathscr{F}^p$.

Указание (для $p > 1$). Докажите вначале *неравенство Гельдера* (по той же схеме, что и, например, для интеграла Римана — см. учебник Зорича по матанализу):

если $f \in \mathscr{F}^p$, $g \in \mathscr{F}^q$, где $1/p + 1/q = 1$, то $fg \in \mathscr{F}^1$, и $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

Упражнение 3. Если $p_1 \geqslant p_2$, то $\mathscr{F}^{p_1} \subset \mathscr{F}^{p_2}$, причем это вложение непрерывно.

Увы, даже $\mathscr{F}^p$ еще слишком велико, чтобы иметь право называться «пространством интегрируемых функций». В частности, I'' не является, вообще говоря, аддитивным на множестве неотрицательных функций из $\mathscr{F}^p$ (пример будет потом)[1]. Однако если ограничиться теми функциями из $\mathscr{F}^p$, которые хорошо приближаются непрерывными, то мы получим то, к чему стремились.

Определение 2. Для каждого действительного $p \in [1, \infty)$ обозначим через $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(X, I)$ замыкание пространства $C(X)$ в $\mathscr{F}^p$. Функции, принадлежащие пространству $\mathscr{L}^1$, называются *интегрируемыми* (по Лебегу).

Очевидно, $\mathscr{L}^p$ — векторное подпространство в $\mathscr{F}^p$.

Упражнение 4. Если $p_1 \geqslant p_2$, то $\mathscr{L}^{p_1} \subset \mathscr{L}^{p_2}$, причем это вложение непрерывно.

Ввиду предыдущего упражнения, чтобы дать определение интеграла Лебега как линейного функционала на $\mathscr{L}^p$, достаточно сделать это для $p = 1$. Вначале заметим следующее:

Упражнение 5. Функционал $I\colon C(X) \to \mathbb{C}$ непрерывен относительно преднормы $\|\cdot\|_1$, индуцированной из $\mathscr{F}^1$.

Теперь воспользуемся теоремой о продолжении по непрерывности — точнее, ее несложным обобщением на случай преднормированных пространств (см. лекцию 8). В применении к функционалу $I \in (C(X), \|\cdot\|_1)^*$ она дает следующее:

Теорема 1. *Существует единственный непрерывный линейный функционал $\tilde{I} \in (\mathscr{L}^1)^*$, такой, что $\tilde{I}|_{C(X)} = I$.*

Определение 3. Функционал, существование которого утверждается в предыдущей теореме, называется *интегралом Лебега*.

Вспомним, что на неотрицательных функциях из $\mathscr{L}^1$ у нас уже был задан некий интеграл — а именно, I''. Как и следовало ожидать, он совпадает с $\tilde{I}$:

Упражнение 6. Если $f \in \mathscr{L}^1$ и $f \geqslant 0$, то $\tilde{I}(f) = I''(f)$.

В дальнейшем мы будем писать I вместо $\tilde{I}$.

Посмотрим теперь на некоторые свойства пространств $\mathscr{L}^p$.

Упражнение 7. Пусть $\varphi \in \Phi(X)$. Тогда $\varphi \in \mathscr{L}^1 \iff \varphi(x) < \infty$ для всех $x \in X$, и $I'(\varphi) < \infty$.

Упражнение 8. 1) Пусть $f \in [0, \infty)^X$. Тогда $f \in \mathscr{L}^p \iff f^p \in \mathscr{L}^1$.
2) Если $f \in \mathscr{L}^p$, то $|f| \in \mathscr{L}^p$ и $|f|^p \in \mathscr{L}^1$.
3) Если $f, g \in \mathscr{L}^1$ принимают значения в $\mathbb{R}$, то $\max\{f, g\} \in \mathscr{L}^1$ и $\min\{f, g\} \in \mathscr{L}^1$.

Замечание 1. Может оказаться, что $|f| \in \mathscr{L}^1$, но $f \notin \mathscr{L}^1$; пример появится несколько позже, когда будет идти речь об измеримости.

[1] Для знакомых с теорией меры скажем, в чем причина: функции из $\mathscr{F}^p$ не обязаны быть измеримыми.

Небольшое неудобство, связанное с пространствами $\mathscr{L}^p$, заключается в том, что они, вообще говоря, не являются нормированными:

Упражнение 9. Пусть $X = [a, b]$, а I — интеграл Римана на $C[a, b]$. Тогда преднорма на $\mathscr{L}^1(X, I)$ не является нормой.

Тем не менее, существует канонический способ изготовить из заданного преднормированного пространства нормированное, «наиболее к нему близкое»:

Упражнение 10. Пусть E — преднормированное пространство. Положим $E_0 = \{x \in E : \|x\| = 0\}$. Тогда:
1) E_0 — векторное подпространство в E, совпадающее с замыканием нуля.
2) Функция $\| \cdot \| \colon E/E_0 \to [0, \infty)$, заданная по правилу $\|\hat{x}\| = \|x\|$ для любого $x \in \hat{x}$, корректно определена и является нормой на E/E_0.
3) E полно[1] $\iff$ E/E_0 полно.

Отметим, что только что определенная норма на E/E_0 — это частный случай общего понятия факторпреднормы, введенного в лекции 7 для нормированных пространств.

Применим теперь указанную конструкцию к пространствам $\mathscr{L}^p$.

Определение 4. Для каждого действительного $p \in [1, \infty)$ положим по определению

$$L^p = L^p(X, I) = \mathscr{L}^p(X, I)/\{f : \|f\|_p = 0\}.$$

Сразу скажем, что в случае, когда $X = [a, b]$, а I — интеграл Римана, пространство L^p — это и есть пополнение $C[a, b]$ по норме $\| \cdot \|_p$ (то, ради чего мы и начали этот разговор об интеграле Лебега). То же самое верно и в общем случае — разумеется, с заменой $(C(X), \| \cdot \|_p)$ на соответствующее нормированное факторпространство (ведь $\| \cdot \|_p$ может и не быть нормой на $C(X)$ — например, при $I = 0$). Чтобы доказать этот факт, нам понадобятся две вещи: во-первых, доказать теорему о «предельном переходе под знаком интеграла», и, во-вторых, описать подпространство $\{f \in \mathscr{L}^p : \|f\|_p = 0\}$, участвующее в определении пространств L^p.

Теорема 2 (о монотонной сходимости-II). *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций из $\mathscr{L}^1$ со значениями в $\mathbb{R}$, такая, что $f_n \leqslant f_{n+1}$ для всех n, и $\lim_n f_n(x) < \infty$ для всех $x \in X$. Положим $f(x) = \lim_n f_n(x)$. Тогда $f \in \mathscr{L}^1$ $\iff$ последовательность $\{I(f_n)\}$ ограничена. При этом $I(f) = \lim_n I(f_n)$.*

Доказательство. Будем считать, что $f_n \geqslant 0$ для всех n (иначе заменим f_n на $f_n - f_1$).

($\Longrightarrow$). Упражнение.

($\Longleftarrow$). По теореме о монотонной сходимости-I (см. прошлую лекцию),

$$I''(f) = \lim_n I''(f_n) = \lim_n I(f_n) < \infty$$

(см. также упражнение 6). Значит, $f \in \mathscr{F}^1$. Покажем, что $f_n \to f$ в пространстве $\mathscr{F}^1$. Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что $|I(f_m) - I(f_n)| < \varepsilon$ при $m, n > N$. Фиксируем

[1] Для преднормированных пространств понятие полноты определяется так же, как и для нормированных.

$n > N$; тогда последовательность $\{f_m - f_n\}_{m=n}^\infty$ монотонно возрастает к $f - f_n$. Снова воспользовавшись той же теоремой (и тем же упражнением 6), мы видим, что

$$\|f - f_n\|_1 = I''(f - f_n) = \lim_m I(f_m - f_n) = \lim_m (I(f_m) - I(f_n)) \leqslant \varepsilon\,.$$

Итак, $\|f - f_n\|_1 \leqslant \varepsilon$ при всех $n > N$, откуда $f_n \to f$ в пространстве $\mathscr{F}^1$. Но $f_n \in \mathscr{L}^1$, а $\mathscr{L}^1$ замкнуто в $\mathscr{F}^1$. Следовательно, $f \in \mathscr{L}^1$. Дальше ясно. $\square$

Из этой теоремы можно вывести «согласованность» интегралов Римана и Лебега по отрезку:

Упражнение 11. Пусть $X = [a, b]$, а $I \in (C[a, b])^*$ — интеграл Римана.
1) Если функция f интегрируема по Риману на $[a, b]$, то $f \in \mathscr{L}^1$, и $I(f)$ совпадает с интегралом Римана от f по $[a, b]$.
2) Если функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ такова, что функция $|f|$ интегрируема по $[a, b]$ в несобственном смысле, то $f \in \mathscr{L}^1$, и $I(f)$ совпадает с несобственным интегралом Римана от f по $[a, b]$.
3) Существует функция f, интегрируемая по $[a, b]$ в несобственном смысле, но не принадлежащая $\mathscr{L}^1$.
Указание к 3). Если $f \in \mathscr{L}^1$, то и $|f| \in \mathscr{L}^1$ (см. упр. 8).

Мера.

Пусть X — множество (пока произвольное), 2^X — система всех его подмножеств.

Определение 5. Семейство $\mathscr{A} \subset 2^X$ называется *алгеброй множеств*, если
1) $X \in \mathscr{A}$;
2) $A \in \mathscr{A} \implies X \setminus A \in \mathscr{A}$;
3) $A, B \in \mathscr{A} \implies A \cup B \in \mathscr{A}$.

Упражнение 12. Если выполнены условия 1) и 2), то условие 3) эквивалентно следующему: $A, B \in \mathscr{A} \implies A \cap B \in \mathscr{A}$.

Определение 6. Алгебра $\mathscr{A}$ называется *σ-алгеброй*, если для любого счетного семейства $\{A_n\} \subset \mathscr{A}$ выполнено $\bigcup_n A_n \in \mathscr{A}$.

Тривиальные примеры σ-алгебр — это, конечно, $\{\varnothing, X\}$ и 2^X. Наиболее содержательные примеры возникают из следующей конструкции:

Упражнение 13. Пусть $\mathscr{P} \subset 2^X$ — произвольное семейство подмножеств X. Тогда

$$\sigma(\mathscr{P}) = \bigcap \{\mathscr{A} : \mathscr{A} \text{ — } \sigma\text{-алгебра, } \mathscr{A} \supset \mathscr{P}\}$$

— наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathscr{P}$. Она называется *σ-алгеброй, порожденной семейством $\mathscr{P}$*.

Упражнение 14. *Описать* (т.е. указать явную конструкцию) наименьшей *алгебры*, содержащей $\mathscr{P}$. Проходит ли такая конструкция для σ-алгебр?

Определение 7. Пусть $\mathscr{A}$ — алгебра подмножеств X.

1) Функция $\mu\colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ называется *аддитивной*, если из $A, B \in \mathscr{A}$, $A \cap B = \varnothing$ следует, что $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

2) Функция $\mu\colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ называется *σ-аддитивной* (или *счетно аддитивной*), если для любого счетного семейства $\{A_n\} \subset \mathscr{A}$, такого, что $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\bigcup_n A_n \in \mathscr{A}$, выполнено $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.

3) Аддитивная функция, принимающая неотрицательные значения, называется *(положительной) мерой* на $\mathscr{A}$.

Замечание 2. Часто мерой называют то, что у нас называется аддитивной (или σ-аддитивной) функцией; иногда еще говорят «комплексная мера». Нам же вполне хватит положительных мер.

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{N}$, и пусть $\{a_n\}$ — последовательность неотрицательных чисел, такая, что ряд $\sum_n a_n$ сходится. Тогда $\mu(A) = \sum_{n \in A} a_n$ — σ-аддитивная мера на $2^{\mathbb{N}}$.

От интеграла к мере.

Вернемся теперь к нашему компакту X и интегралу $I \in C(X)^*$. Наша ближайшая цель — построить по I некую меру на X. Вначале разберемся с σ-алгеброй, на которой эта мера будет задана.

Определение 8. Наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые подмножества X, называется *борелевской* σ-алгеброй и обозначается $\mathscr{B}or(X)$. Ее элементы называются *борелевскими* множествами.

Пример 2. Конечно, борелевскими являются все открытые и все замкнутые множества, всевозможные их счетные пересечения и объединения и т.п. Однако более-менее явно описать все борелевские множества, увы, нельзя (см. упражнение 14).

Определение 9. Пусть X — компакт и $\mathscr{A}$ — σ-алгебра его подмножеств. Тогда σ-аддитивная мера μ на $\mathscr{A}$ называется

1) *борелевской*, если $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}or(X)$;

2) *регулярной*, если для любого $A \in \mathscr{A}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется открытое $U \supset A$, такое, что $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$.

Замечание 3. 1) Для некомпактного X понятие регулярной меры вводится несколько по-другому.

2) На «хороших» (например, метризуемых) компактах любая борелевская мера регулярна (см. Федоров, «Теория функций и функциональный анализ», т. I).

Определение 10. Пусть $A \subset X$. Тогда функция

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

называется *индикатором* или *характеристической функцией* множества A.

Как Вы хорошо знаете, длина отрезка $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ равна интегралу Римана по $[a, b]$ от $\chi_{[\alpha,\beta]}$. Попробуем использовать это наблюдение и определить меру на компакте X, исходя из интеграла $I \in C(X)^*$, следующим образом:

Определение 11. Функция $\bar{\mu}\colon 2^X \to [0,\infty)$, $\bar{\mu}(A) = I''(\chi_A)$, называется *внешней мерой*, ассоциированной с интегралом I.

Упражнение 15. Установите следующие свойства внешней меры:
1) $A \subset B \implies \bar{\mu}(A) \leqslant \bar{\mu}(B)$;
2) $\bar{\mu}(\bigcup_n A_n) \leqslant \sum_n \bar{\mu}(A_n)$;
3) $\bar{\mu}(A) = \inf\{\bar{\mu}(U) : U \supset A,\ U \text{ открыто}\}$.
Указание к 3). Вначале проверьте, что U открыто $\iff \chi_U \in \Phi(X)$.

К сожалению, внешняя мера — это еще не мера, потому что она не обязана быть аддитивной (мы к этому еще вернемся). Но если сузить ее область определения (т.е. приписать «меру» не всем подмножествам X, а лишь некоторым из них), то все получится:

Определение 12. Назовем множество $A \subset X$ *измеримым*, если $\chi_A \in \mathscr{L}^1$. Семейство всех измеримых подмножеств X обозначим через $\mathfrak{M}$. Ограничение внешней меры $\bar{\mu}$ на $\mathfrak{M}$ будем обозначать просто μ.

Упражнение 16. 1) $\mathfrak{M}$ — σ-алгебра;
2) μ — σ-аддитивная мера на $\mathfrak{M}$;
3) $\mathfrak{M} \supset \mathscr{B}or(X)$ (т.е. μ — борелевская мера);
4) μ регулярна;
5) если $A \subset X$, то $\bar{\mu}(A) = 0 \iff A \in \mathfrak{M}$ и $\mu(A) = 0$.
Указание к 1) и 2): воспользуйтесь теоремой о монотонной сходимости.

Выделим два важных следствия из последнего упражнения. Первое из них называется свойством *полноты* меры μ.

Следствие 1. *Подмножество измеримого множества меры нуль само измеримо и имеет меру нуль.*

Следствие 2. *Объединение счетного семейства множеств меры нуль измеримо и имеет меру нуль.*

Определение 13. В случае, когда $X = [a,b]$, а I — интеграл Римана, построенная мера μ называется *мерой Лебега*, а множества из $\mathfrak{M}$ — *измеримыми по Лебегу.*

Теперь мы можем вспомнить определение пространств L^p и описать множество тех $f \in \mathscr{L}^p$, для которых $\|f\|_p = 0$ (т.е. по которым надо было профакторизовать $\mathscr{L}^p$, чтобы получить L^p).

Определение 14. Будем говорить, что некое свойство $P(x)$ точек $x \in X$ выполняется *почти всюду* (п.в.), если $\mu\{x : P(x) \text{ не выполняется}\} = 0$.

(Что означает «свойство выполняется», каждый раз будет ясно из контекста.)

Предложение 1. *Пусть* $f \in [0,\infty]^X$. *Тогда*
1) $I''(f) = 0 \iff f = 0$ *п.в.;*
2) *если* $I''(f) < \infty$, *то* $f < \infty$ *п.в.*

Доказательство. 1) Положим $A = \{x \in X : f(x) > 0\}$.

($\Longrightarrow$). Ясно, что $\chi_A \leqslant \lim_n nf$. Из теоремы о монотонной сходимости-I (см. прошлую лекцию) заключаем, что $\bar\mu(A) = I''(\chi_A) \leqslant \lim_n nI''(f) = 0$, как и требовалось.

($\Longleftarrow$). Аналогично, с заменой f на χ_A и наоборот (упражнение).

2) Положим $B = \{x \in X : f(x) = \infty\}$. Ясно, что $\chi_B < \varepsilon f$ для любого $\varepsilon > 0$. Отсюда $\bar\mu(B) \leqslant \varepsilon I''(f)$. Но $I''(f) < \infty$, поэтому, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, получаем $\bar\mu(B) = 0$, как и требовалось. $\square$

Следствие 3. *Пусть* $p \in [1, \infty)$, *и пусть* $f \in \mathbb{C}^X$. *Тогда* $f = 0$ *п.в.* $\iff$ $f \in \mathscr{L}^p$ *и* $\|f\|_p = 0$. *Поэтому*

$$L^p(X, I) = \mathscr{L}^p(X, I)/\{f : f = 0 \text{ п.в.}\}$$

Упражнение 17. Если $p_1 \geqslant p_2$, то L^{p_1} канонически вкладывается (см. упр. 4) в L^{p_2}, причем это вложение непрерывно.

Из предложения 1 также нетрудно вывести, что интеграл «не различает» функции, совпадающие почти всюду:

Упражнение 18. 1) Если $f, g \in [0, \infty]^X$ и $f \leqslant g$ п.в., то $I''(f) \leqslant I''(g)$.

2) Если $f, g \in \mathbb{C}^X$ и $f = g$ п.в., то $f \in \mathscr{L}^p \iff g \in \mathscr{L}^p$. При этом $I(f) = I(g)$.

Отметим также, что интеграл является непрерывным линейным функционалом на каждом L^p:

Упражнение 19. Рассмотрим интеграл I как функционал на $\mathscr{L}^p$ (см. теорему 1). Тогда

$$\{f \in \mathscr{L}^p : \|f\|_p = 0\} \subset \operatorname{Ker} I,$$

и, как следствие (см. упр. 25 из лекции 7), существует единственный функционал $\widehat{I} \in (L^p)^*$, такой, что $\widehat{I}([f]) = I(f)$ для любой $f \in \mathscr{L}^p$ (здесь через $[f]$ обозначен класс смежности элемента f в пространстве L^p).

Определение 15. Говорят, что две функции $f, g \colon X \to \mathbb{C}$ *эквивалентны* (и пишут $f \sim g$), если $\mu\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0$.

Таким образом, L^p — это множество классов эквивалентности функций из $\mathscr{L}^p$.

В теории интегрирования принято не различать эквивалентные функции (по понятным причинам — см. выше). Поэтому часто допускают некоторую нестрогость и говорят «функция из L^p», понимая под этим произвольного представителя из соответствующего класса эквивалентности. Функционал $\widehat{I}$ на L^p, введенный в предыдущем упражнении, мы будем обозначать просто I.

Замечание 4. В некоторых книжках пространства $\mathscr{L}^p$ определяются не совсем так, как у нас. (Здесь мы следуем книге Эдвардса “Integration and harmonic analysis on compact groups”). Иногда в $\mathscr{L}^p$ включают также и функции, которые почти всюду определены, почти всюду конечны, и после надлежащего доопределения оказываются эквивалентными некоторой функции, принадлежащей $\mathscr{L}^p$ в нашем смысле. (Кстати, здесь неважно, как именно доопределять такую функцию — ведь всевозможные доопределения эквивалентны друг другу и поэтому либо все лежат в $\mathscr{L}^p$, либо все там не лежат.) Факторизуя такое «расширенное» $\mathscr{L}^p$ по соответствующему отношению эквивалентности, мы придем *к тому же самому* L^p. (Пространства L^p, в отличие от $\mathscr{L}^p$ — это «классика», и все имеющиеся в литературе определения этих пространств эквивалентны друг другу). Недостаток «расширенного» $\mathscr{L}^p$ по сравнению с «нашим» — в том, что оно не является векторным пространством. Тем не менее, технически удобно называть *интегрируемой* любую функцию $f\colon D \to \mathbb{C}$, заданную на некотором подмножестве $D \subset X$, дополнение $X \setminus D$ которого имеет меру нуль, причем $f \sim g$ для некоторой $g \in \mathscr{L}^1$. При этом полагают по определению $I(f) = I(g)$; из предложения 1 вытекает, что такое определение корректно, т.е. не зависит от выбора g.

Например, функция $f(x) = x^{-1/2}$ интегрируема на $[0,1]$ (см. упр. 11), хотя и не всюду определена.

Где об этом почитать. См. литературные указания в конце прошлой лекции.