Лекция 11.
Существование неизмеримых множеств.

Сегодня мы начнем с того, что разберемся с некоторыми вопросами, которые возникли на прошлой лекции. Оказывается, вопросы типа «Чем $\mathscr{L}^1$ лучше $\mathscr{F}^1$?», «Почему интеграл I'' не аддитивен на $\mathscr{F}^1$?», «Откуда берутся интегрируемые по модулю, но не интегрируемые функции?», «Почему внешняя мера — это не мера?» и многие другие имеют один ответ: все эти неприятности происходят из-за существования неизмеримых множеств.

Неизмеримое множество мы будем строить на отрезке $[0,1]$, снабженном мерой Лебега μ (см. прошлую лекцию). Нам понадобится такое важное свойство этой меры, как *инвариантность относительно сдвигов:*

Упражнение 1. Пусть $A \subset [a,b]$ измеримо и $t \in \mathbb{R}$ таково, что $A+t \subset [a,b]$. Тогда $A+t$ измеримо, и $\mu(A+t) = \mu(A)$.

Для построения неизмеримого множества введем на $[0,1]$ отношение эквивалентности, полагая $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. В каждом классе эквивалентности выберем по одному элементу, и из них составим множество A. Покажем, что A неизмеримо. Для этого сделаем два наблюдения:

1) Если $s,t \in \mathbb{Q}$ и $s \neq t$, то $(A+s) \cap (A+t) = \varnothing$.
2) $[0,1] \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q}\cap[-1,1]} (A+r) \subset [-1,2]$.

Предположим, что A измеримо. Если $\mu(A) > 0$, то из 1), 2) и упражнения 1 следует, что $\mu([-1,2]) \geqslant \sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \mu(A+r) = \infty$; если же $\mu(A) = 0$, то $\mu([0,1]) \leqslant \sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \mu(A+r) = 0$. В обоих случаях приходим к противоречию. Следовательно, A неизмеримо.

Пример 1. Теперь мы можем легко построить функцию f на $[0,1]$, такую, что $|f| \in \mathscr{L}^1$, но $f \notin \mathscr{L}^1$. А именно, возьмем неизмеримое множество A и положим $f = 2\chi_A - 1$. Тогда $\chi_A \notin \mathscr{L}^1$ (по определению измеримого множества), поэтому и $f \notin \mathscr{L}^1$. С другой стороны, $|f| = 1 \in \mathscr{L}^1$.

Замечание 1. Пусть X, как и раньше — компакт, на котором задана мера указанным в прошлой лекции способом. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *измеримой*, если $f^{-1}((-\infty,c))$ — измеримое множество для любого $c \in \mathbb{R}$. По определению, функция $f\colon X \to \mathbb{C}$ измерима, если $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ измеримы. Тогда, оказывается,

$$\mathscr{L}^p = \{f \in \mathbb{C}^X : f \text{ измерима и } |f|^p \in \mathscr{F}^1\}.$$

Иными словами, $\mathscr{L}^1$ состоит в точности из тех функций из $\mathscr{F}^1$, которые измеримы, а $\mathscr{L}^p$ из тех измеримых функций, p-я степень которых принадлежит $\mathscr{L}^1$. В частности, если f измерима, то $f \in \mathscr{L}^1 \iff |f| \in \mathscr{L}^1$. Впрочем, в дальнейшем нам это не понадобится.

Упражнение 2. Покажите, что интеграл I'' не аддитивен на множестве всех неотрицательных функций из $\mathscr{F}^1([0,1])$.
Указание. Если бы он был аддитивен, то любая неотрицательная функция из $\mathscr{F}^1$ приближалась бы по преднорме $\|\cdot\|_1$ функциями из $\mathscr{L}^1 \cap \Phi(X)$ (см. определение 7 из лекции 9), а, значит, сама лежала бы в $\mathscr{L}^1$.

Упражнение 3. Докажите, что $A \subset X$ измеримо $\iff$ $\bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(X \setminus A) = \mu(X)$.

Из предыдущего упражнения следует, в частности, что внешняя мера Лебега на отрезке не аддитивна на семействе всех подмножеств отрезка. Отсюда сразу получается результат упражнения 2 (как?)

Теоремы о предельном переходе. Полнота L^p.

Пусть, как и раньше, X — компакт, $I \in C(X)^*$ — интеграл, μ — соответствующая мера на X. Напомним (см. конец прошлой лекции), что функция $f\colon D \to \mathbb{C}$, заданная на множестве $D \subset X$, таком, что $\mu(X \setminus D) = 0$, называется *интегрируемой*, если она эквивалентна некоторой $g \in \mathscr{L}^1$ (т.е. $f = g$ п.в.) При этом мы полагаем по определению $I(f) = I(g)$.

Теорема 1 (о монотонной сходимости-III). *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций из $\mathscr{L}^1$ со значениями в $\mathbb{R}$, такая, что $f_n \leqslant f_{n+1}$ для всех n. Положим $f(x) = \lim_n f_n(x)$ (для тех x, где этот предел существует). Тогда f интегрируема $\iff$ последовательность $\{I(f_n)\}$ ограничена. При этом $I(f) = \lim_n I(f_n)$.*

Замечание 2. Здесь, в отличие от теоремы о монотонной сходимости-II, не предполагается, что $\lim_n f_n(x)$ существует для всех x.

Доказательство. Как и в предыдущем варианте теоремы, мы можем считать, что $f_n \geqslant 0$ для всех n.

($\Longrightarrow$). Выберем $g \in \mathscr{L}^1$, эквивалентную f. Тогда $f_n \leqslant g$ п.в., поэтому $I(f_n) = I''(f_n) \leqslant I''(g)$ (см. упражнение 18 из предыдущей лекции).

($\Longleftarrow$). Из теоремы о монотонной сходимости-I следует, что $I''(f) = \lim_n I''(f_n) < \infty$. Поэтому $f < \infty$ п.в. (см. предложение 1 из прошлой лекции). Положим $A = \{x \in X : f(x) < \infty\}$, и рассмотрим функции $g = f\chi_A$, $g_n = f_n\chi_A$. Тогда $g_n \uparrow g$ в каждой точке, причем $g_n \sim f_n$, а $g \sim f$. Поэтому последовательность $\{I(g_n)\} = \{I(f_n)\}$ ограничена, и, по теореме о монотонной сходимости-II, $g \in \mathscr{L}^1$ и $I(g) = \lim_n I(g_n) = \lim_n I(f_n)$. Дальше ясно. $\square$

Теорема 2 (Фату). *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций из $\mathscr{L}^1$, $f_n \geqslant 0$ для всех n, сходящаяся п.в. к некоторой $f \in \mathbb{R}^X$. Предположим, что последовательность $\{I(f_n)\}$ ограничена. Тогда $f \in \mathscr{L}^1$ и $I(f) \leqslant \underline{\lim}_n I(f_n)$.*

Доказательство. Для каждого n положим $g_n = \inf_{k \geqslant n} f_k$. Тогда, очевидно, $g_n \uparrow f$ п.в. Покажем, что $g_n \in \mathscr{L}^1$ для всех n. Зафиксируем n и введем функции $g_{np} = \inf_{n \leqslant k \leqslant n+p} f_k$. Тогда $g_{np} \in \mathscr{L}^1$ (см. упражнение 8 с прошлой лекции), и $g_{np} \downarrow g_n$ при $p \to \infty$ в каждой точке. Кроме того, последовательность $\{I(g_{np})\}_{p \in \mathbb{N}}$, очевидно, ограничена. Применяя теорему о монотонной сходимости-II к последовательности $\{-g_{np}\}_{p \in \mathbb{N}}$, получаем, что $g_n \in \mathscr{L}^1$. Поскольку $g_n \leqslant f_n$, последовательность $\{I(g_n)\}$ ограничена. Положим $g(x) = \lim_n g_n(x)$ (там, где этот предел существует); тогда $g \sim f$ (см. выше). По теореме о монотонной сходимости-III, g (а, значит, и f) интегрируема, и $I(f) = I(g) = \lim_n I(g_n) = \underline{\lim}_n I(g_n) \leqslant \underline{\lim}_n I(f_n)$, как и требовалось. $\square$

Упражнение 4. 1) Приведите пример последовательности $\{f_n\}$ и функции f, удовлетворяющих условиям теоремы Фату, и таких, что $I(f) < \lim_n I(f_n)$.

2) Покажите, что условие $f_n \geqslant 0$ в теореме Фату нельзя убрать.

3) Тем не менее, это условие можно заменить на $f_n \geqslant F$, где $F \in \mathscr{L}^1$.

Указание. 1) См. указание к упр. 5 из лекции 3.

2) Подойдет f из упр. 11 (3) с прошлой лекции.

Со следующим полезным утверждением Вы, скорее всего, уже встречались в курсе матанализа:

Упражнение 5. Если фундаментальная последовательность в (пред)метрическом пространстве содержит сходящуюся подпоследовательность, то она сама сходится.

Теорема 3. *Пространство $L^p(X, I)$ полно.*

Доказательство. С учетом упражнения 10 (3) с прошлой лекции, достаточно доказать полноту $\mathscr{L}^p$. Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в $\mathscr{L}^p$. Выберем подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, такую, что $\|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\|_p \leqslant 1/2^k$ для всех k. Ввиду упр. 5, достаточно доказать сходимость $\{f_{n_k}\}$. Поэтому мы можем считать, что $\|f_k - f_{k-1}\|_p \leqslant 1/2^k$ для всех k (здесь $f_0 = 0$). Положим $g_n = \sum_{k=1}^n |f_k - f_{k-1}|$. Очевидно, $g_n \leqslant g_{n+1}$ для всех n. Пусть $g(x) = \lim_n g_n(x)$ (конечно, g не обязана быть всюду конечной). Заметим, что

$$I(g_n^p) = \|g_n\|_p^p \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n \|f_k - f_{k-1}\|_p\Big)^p \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n 1/2^k\Big)^p < 1.$$

Поскольку $g_n^p \uparrow g^p$, из теоремы о монотонной сходимости-III следует, что g^p интегрируема. В частности, $g^p < \infty$ п.в. (см. предложение 1 (2) с прошлой лекции), поэтому и $g < \infty$ п.в. Иными словами, ряд $\sum_{k=1}^\infty |f_k(x) - f_{k-1}(x)|$ сходится п.в. Значит, ряд $\sum_{k=1}^\infty (f_k(x) - f_{k-1}(x))$ тоже сходится п.в., а это означает, что предел $\lim_n f_n(x)$ существует почти всюду. Положим $f(x) = \lim_n f_n(x)$ в тех точках $x \in X$, где этот предел существует (и конечен), и $f(x) = 0$ в остальных точках.

Покажем, что $f_n \to f$ в $\mathscr{F}^p$. Для этого возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и подберем N так, что $\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon$, т.е. $I(|f_m - f_n|^p) < \varepsilon^p$ при $m, n > N$. Фиксируем произвольное $n > N$. Тогда $|f_m - f_n|^p \to |f - f_n|^p$ п.в. при $m \to \infty$, и из теоремы Фату мы получаем, что $|f - f_n|^p \in \mathscr{L}^1$ и $I(|f - f_n|^p) \leqslant \varepsilon^p$. Отсюда следует, во-первых, что $f - f_n \in \mathscr{F}^p$, так что $f \in \mathscr{F}^p$, а во-вторых — что $\|f - f_n\|_p \leqslant \varepsilon$ (напомним, при всех $n > N$). Это означает, что $f_n \to f$ в $\mathscr{F}^p$. Но $f_n \in \mathscr{L}^p$, а $\mathscr{L}^p$ замкнуто в $\mathscr{F}^p$. Дальше ясно. □

Следствие 1. *Пусть компакт X и интеграл $I \in C(X)^*$ таковы, что преднорма $\|\cdot\|_p$ на $C(X)$, задаваемая формулой $\|f\|_p = I(|f|^p)^{1/p}$, является нормой. Тогда пополнение нормированного пространства $(C(X), \|\cdot\|_p)$ изометрически изоморфно (т.е. изоморфно в $\mathscr{B}an_1$) пространству $L^p(X, I)$.*

Доказательство. Рассмотрим цепочку отображений $(C(X), \|\cdot\|_p) \to \mathscr{L}^p \to L^p$, первое из которых — каноническое вложение, а второе — фактор-отображение. Первое их них имеет плотный образ, второе сюръективно, и оба они изометричны. Значит, и их композиция j имеет плотный образ и изометрична. Дальше ясно. □

Следствие 1 работает, в частности, в том случае, когда X — отрезок, а I — интеграл Римана на $C[a,b]$.

Упражнение 6. 1) Пусть $X=[0,1]$ и интеграл I определен так: $I(f)=f(0)$. Опишите соответствующую меру на $[0,1]$ и пространство $L^p(X,I)$.

2) Пусть $\{x_n\}\subset[0,1]$ — счетное подмножество, и $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел, такая, что ряд $\sum_n a_n$ сходится. Для каждой $f\in C[0,1]$ положим $I(f)=\sum_n a_n f(x_n)$. Опишите соответствующую меру на $[0,1]$ и пространство $L^p(X,I)$.

Вот еще одна (может быть, наиболее часто используемая) теорема о предельном переходе:

Теорема 4 (теорема Лебега о мажорированной сходимости). *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций из $\mathscr{L}^1$, сходящаяся п.в. к некоторой $f\in\mathbb{C}^X$. Предположим, что существует $F\in\mathscr{L}^1$ такая, что $|f_n(x)|\leqslant F(x)$ п.в. для каждого n. Тогда $f\in\mathscr{L}^1$ и $f_n\to f$ в $\mathscr{L}^1$. В частности, $I(f)=\lim_n I(f_n)$.*

Упражнение 7. Докажите теорему Лебега.
Указание. Вначале рассмотрите случай, когда все функции вещественны, и примените теорему Фату (вместе с упражнением 4 (3)) к последовательности $\{f_n\}$, затем — к $\{-f_n\}$, и, наконец, к $\{|f-f_n|\}$.

От меры к интегралу.

На прошлой лекции мы научились строить на компакте X меру, исходя из интеграла $I\in C(X)^*$. На самом деле, можно действовать и в обратном направлении — взять «хорошую» меру на X и по ней построить интеграл. Обсудим в двух словах, как это делается.

Итак, пусть X — компакт. Назовем функцию $f\colon X\to\mathbb{C}$ *простой*, если она является линейной комбинацией индикаторов борелевских подмножеств X. Множество всех простых функций обозначим через $S(X)$; очевидно, это векторное подпространство в $\ell^\infty(X)$. Замыкание $S(X)$ в $\ell^\infty(X)$ обозначим через $B(X)$.

Упражнение 8. Докажите, что $C(X)\subset B(X)$.

Определение 1. Функция $f\colon X\to\mathbb{C}$ называется *борелевской*, если $f^{-1}(B)\in\mathscr{B}or(X)$ для любого $B\in\mathscr{B}or(\mathbb{C})$.

Упражнение 9. Функция f — борелевская $\iff$ $f^{-1}(U)\in\mathscr{B}or(X)$ для любого открытого $U\subset\mathbb{C}$ $\iff$ $f^{-1}(F)\in\mathscr{B}or(X)$ для любого замкнутого $F\subset\mathbb{C}$.

Упражнение 10. $B(X)$ — это в точности множество всех ограниченных борелевских функций на X.

Упражнение 11. Пусть I — интеграл на X. Докажите, что $B(X)\subset\mathscr{L}^1(X,I)$.

Пусть μ — регулярная борелевская мера на X.

Упражнение 12. Докажите, что существует единственный функционал $I\in B(X)^*$, такой, что $I(\chi_B)=\mu(B)$ для всех $B\in\mathscr{B}or(X)$. Докажите, что этот функционал положителен.

Ограничение построенного функционала на подпространство $C(X) \subset B(X)$ обозначим через I_μ. Из предыдущего упражнения вытекает, что I_μ — интеграл на X, так что к нему применимы все вышеизложенные конструкции. В частности, по нему можно построить меру по рецепту, который обсуждался на прошлой лекции. Как и следовало ожидать, эта мера совпадает с исходной мерой μ. Более того, справедлива

Теорема 5. *Отображение*

$$\left\{\begin{array}{l}\text{множество регулярных}\\ \text{борелевских мер на } X\end{array}\right\} \to \{I \in C(X)^* : I \geqslant 0\},$$
$$\mu \mapsto I_\mu$$

— биекция множеств. Обратное отображение действует по правилу $I \mapsto \mu_I$*, где* $\mu_I(B) = I''(\chi_B)$ *для всех* $B \in \mathscr{B}or(X)$.

Упражнение 13. Докажите эту теорему.
Указание. Пусть I — интеграл на X. Чтобы доказать, что $I = I_{\mu_I}$, можно воспользоваться упражнением 6 из лекции 9 (заменив в нем $C(X)$ на $S(X)$) и тем, что I и I_{μ_I} совпадают на $S(X)$. Если же μ — регулярная борелевская мера, $I = I_\mu$ — соответствующий интеграл и $\mu' = \mu_I$ — мера, построенная по I, то для доказательства равенства $\mu = \mu'$ можно действовать так: возьмите открытое $U \subset X$ и, пользуясь регулярностью μ и μ', постройте последовательность компактов $K_n \subset U$ так, чтобы $\mu(K_n) \to \mu(U)$ и $\mu'(K_n) \to \mu'(U)$. Дальше возьмите $f_n \in C(X)$ так, чтобы $\chi_{K_n} \leqslant f_n \leqslant \chi_U$ (здесь поможет указание к упр. 9 из лекции 9). Тогда $I(f_n) \to \mu(U)$, и в то же время $I(f_n) \to \mu'(U)$.

Таким образом, говорить об интегралах — это все равно, что говорить о мерах. По этой причине вместо $L^p(X, I)$ обычно пишут $L^p(X, \mu)$ (указывая не на интеграл, а на меру). Вместо $I_\mu(f)$ чаще используют классическое обозначение $\int_X f(x)\,d\mu(x)$ или просто $\int_X f\,d\mu$ и называют это число интегралом от f по мере μ.

Замечание 3. Доказывая теорему 5, по ходу дела нетрудно понять, что из регулярности борелевской меры автоматически следует ее σ-аддитивность.

Замечание 4. Легко заметить, что в упражнении 12 не обязательно требовать, чтобы μ была регулярна и σ-аддитивна. В этом случае процесс "мера $\mapsto$ интеграл $\mapsto$ мера" дает способ «регуляризовать» меру μ: мы получаем нечто вроде проектора из множества всех борелевских мер на подмножество регулярных мер.

Замечание 5. От теоремы 5 уже недалеко до описания *всех* (не только положительных) непрерывных линейных функционалов на $C(X)$. А именно, если вместо положительных мер рассматривать комплексные (т.е. принимающие значения в $\mathbb{C}$), то описанная в теореме 5 биекция продолжается до биекции между $C(X)^*$ и пространством $M(X)$ всех регулярных борелевских комплексных мер на X. Более того, $M(X)$ можно превратить в нормированное (на самом деле — банахово) пространство, сопоставив каждой комплексной мере ее так называемую *вариацию*. При этом биекция $M(X) \cong C(X)^*$ — изометрический изоморфизм банаховых пространств. Последнее утверждение известно как *теорема Рисса-Маркова-Какутани.*

Если же взять пространство $B(X)$, то конструкция из упражнения 12 позволяет отождествить его сопряженное $B(X)^*$ с пространством всех (не обязательно регулярных и σ-аддитивных) борелевских комплексных мер конечной вариации. При этом отображение, сопряженное к вложению $C(X) \hookrightarrow B(X)$ — это тот самый «регуляризирующий проектор», который был описан в предыдущем замечании.

Замечания об интегрировании на локально компактных пространствах.

Как Вы хорошо знаете, часто бывает полезно уметь интегрировать функции не только по отрезку, но и по прямой. Для этого существует несобственный интеграл Римана. Хотя прямая некомпактна, на ней (а также на многих других некомпактных пространствах) можно интегрировать и по Лебегу.

Определение 2. Топологическое пространство X называется *локально компактным*, если у каждой точки X есть окрестность, замыкание которой компактно.

Пусть X — локально компактное пространство. Обозначим через $C_c(X)$ пространство всех непрерывных функций на X с компактным носителем.

Определение 3. *Интегралом* на X называется положительный линейный функционал на $C_c(X)$.

Упражнение 14. Такой функционал уже не обязательно непрерывен относительно равномерной нормы (ср. упражнение 6 из лекции 9): постройте соответствующий контрпример.

При таком определении интеграла почти все основные конструкции и теоремы, обсуждавшиеся выше для компактного X, остаются в силе. В частности, интегралы I', I'', пространства $\mathscr{F}^p$, $\mathscr{L}^p$ и L^p определяются точно так же (с заменой $C(X)$ на $C_c(X)$).

Упражнение 15. Пусть $X = \mathbb{N}$ с дискретной топологией. Тогда $C_c(X)$ — это не что иное, как пространство c_{00} финитных последовательностей. Определим функционал $I\colon c_{00} \to \mathbb{C}$ формулой $I(f) = \sum_n f(n)$. Опишите, как устроена соответствующая мера μ (она называется *считающей* мерой на $\mathbb{N}$), и покажите, что все подмножества $\mathbb{N}$ измеримы. Докажите, что $L^p(\mathbb{N}) = \mathscr{L}^p(\mathbb{N}) = \mathscr{F}^p(\mathbb{N}) = \ell_p$.

Пример 2. Если $X = \mathbb{R}$, а I — обычный интеграл Римана (разумеется, определенный на пространстве $C_c(\mathbb{R})$), то соответствующая мера μ называется *мерой Лебега* на $\mathbb{R}$. Ее ограничение на произвольный отрезок $[a, b]$ совпадает с мерой Лебега, построенной по интегралу Римана на $C[a, b]$ (почему?) Говоря о соответствующих L^p-пространствах, обычно опускают символ μ и пишут просто $L^p(\mathbb{R})$ или $L^p[a, b]$.

Теоремы о предельном переходе и о полноте L^p сохраняют силу и в некомпактном случае, причем с тем же доказательством (попробуйте в этом убедиться!)

С другой стороны, при отказе от компактности X нарушаются отношения включения между пространствами L^p (а также $\mathscr{F}^p$ и $\mathscr{L}^p$) при различных p (ср. упражнения 3, 4 и 17 из лекции 10).

Упражнение 16. Убедитесь, что $L^{p_1}(\mathbb{R}) \not\subset L^{p_2}(\mathbb{R})$ при $p_1 \neq p_2$.

Что же касается случая $X = \mathbb{N}$ (см. упражнение 15), то здесь отношения включения между L^p-пространствами прямо противоположны тем, которые имеют место для компактного X (ср. упражнение 5 из лекции 2).

Наконец, теорема 5 (и более общая теорема Рисса-Маркова-Какутани) в некомпактном случае формулируется несколько по-другому.

Где об этом почитать. См. литературные указания в конце лекции 9. Теорема Рисса-Маркова-Какутани (в общем виде) доказана в книге Хьюитта и Росса «Абстрактный гармонический анализ». Другое доказательство, при котором используется лебеговский подход к теории интегрирования (вначале — мера, потом — интеграл) можно найти в первом томе Данфорда и Шварца («Линейные операторы») или у Федорова («Теория функций и функциональный анализ»).