Лекция 12.
Гильбертовы пространства.

Сегодня мы познакомимся с одним важным классом банаховых пространств, наиболее хорошо устроенных с геометрической точки зрения и поддающихся поэтому полной классификации (см. лекцию 3). Норма в таких пространствах определяется при помощи скалярного произведения. Скорее всего, вы уже встречались с такими пространствами (по крайней мере, в конечномерном случае) в курсе алгебры.

Итак, пусть H — векторное пространство[1] над $\mathbb{C}$.

Определение 1. Отображение $R\colon H\times H\to\mathbb{C}$ называется *полуторалинейной формой*, если

1) $R(\lambda x+\mu y, z)=\lambda R(x,z)+\mu R(y,z)$,

2) $R(x,\lambda y+\mu z)=\bar\lambda R(x,y)+\bar\mu R(x,z)$ для всех $x,y,z\in H,\ \lambda,\mu\in\mathbb{C}$.

Полуторалинейная форма называется *эрмитовой*, если

3) $R(y,x)=\overline{R(x,y)}$ для всех $x,y\in H$,

положительной, если

4) $R(x,x)\geqslant 0$ для всех $x\in H$,

и *невырожденной*, если

5) $R(x,x)=0 \iff x=0$.

Полуторалинейная форма, обладающая всеми пятью свойствами, называется *скалярным произведением* на H.

Определение 2. *Предгильбертово пространство* — это векторное пространство, снабженное скалярным произведением.

В дальнейшем, говоря о скалярном произведении, мы будем вместо $R(x,y)$ писать $\langle x,y\rangle$.

Пример 1. Пространство $\mathbb{C}^n$ становится предгильбертовым, если скалярное произведение задать формулой $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_i\bar y_i$.

Пример 2. На пространстве ℓ^2 тоже есть скалярное произведение, задаваемое формулой $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^\infty x_i\bar y_i$. Заметьте, что последний ряд сходится абсолютно: это сразу следует из неравенства $ab\leqslant\frac12(a^2+b^2)$, справедливого для любых $a,b\in\mathbb{R}$.

Пример 3. Формула $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$ задает скалярное произведение на пространстве $C[a,b]$.

При составлении конспекта использованы неопубликованные записки лекций А. Я. Хелемского «Лекции и упражнения по функциональному анализу» (с согласия автора).

[1]Буква H — в честь Гильберта.

Пример 4. Более общо, пусть X — локально компактное топологическое пространство, $I\colon C_c(X) \to \mathbb{C}$ — положительный линейный функционал, а μ — соответствующая мера на X (см. прошлую лекцию). Тогда $\langle f, g\rangle = I(f\bar g) = \int_X f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x)$ — положительная эрмитова форма на $C_c(X)$.

Упражнение 1. Докажите, что если $f, g \in \mathscr{L}^2(X,\mu)$, то $fg \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$.

Пример 5. Из последнего упражнения сразу следует, что та же формула, что и в примере 4, задает положительную эрмитову форму на $\mathscr{L}^2(X,\mu)$. Та же самая формула корректно задает скалярное произведение на $L^2(X,\mu)$ (см. предложение 1 из лекции 10).

Пусть H — предгильбертово пространство. Для каждого $x \in H$ положим по определению $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. (Мы еще не знаем, что это норма, но скоро это докажем.)

Предложение 1 (неравенство Коши-Буняковского-Шварца). *Для любых $x, y \in H$ справедливо неравенство $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$.*

Доказательство. Очевидно, мы можем считать, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ имеем $\langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle \geqslant 0$, т.е.

$$\|x\|^2 - \bar\lambda\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, x\rangle + |\lambda|^2\|y\|^2 \geqslant 0.$$

Подставляя сюда $\lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$, получаем $\|x\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} \geqslant 0$. Дальше ясно. □

Упражнение 2. Равенство $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$ возможно только для пропорциональных x и y.

Предложение 2. *Функция $\|\cdot\|\colon H \to [0, +\infty)$, задаваемая формулой $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, является нормой на H.*

Доказательство. С учетом неравенства Коши-Буняковского-Шварца, для любых $x, y \in H$ получаем:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leqslant \\ \leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Это доказывает справедливость неравенства треугольника. Остальные свойства нормы очевидны. □

Итак, каждое предгильбертово пространство становится нормированным, если положить $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Упражнение 3. Скалярное произведение — непрерывная функция на $H \times H$.

Норма в предгильбертовом пространстве обладает многими приятными геометрическими свойствами:

Упражнение 4. Докажите, что в предгильбертовом пространстве равенство $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ возможно только для пропорциональных x и y (т.е. предгильбертово пространство — строго нормированное; см. лекцию 2).

Упражнение 5 (Тождество параллелограмма). В предгильбертовом пространстве справедливо тождество

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Упражнение 6. 1) Норма в пространствах $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ (для $n \geqslant 2,\ p \neq 2$), c_0, ℓ^∞, ℓ^p, $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ и $L^p[a,b]$ (для $p \neq 2$) не задается никаким скалярным произведением. Иначе говоря, перечисленные пространства не изоморфны предгильбертовым в категории $\mathscr{N}orm_1$.
2)* Норма в вышеперечисленных пространствах (за исключением $\mathbb{C}^n$) не эквивалентна никакой норме, задаваемой скалярным произведением. Иначе говоря, эти пространства не изоморфны предгильбертовым (даже) в категории $\mathscr{N}orm$.

Еще один полезный факт: оказывается, скалярное произведение можно восстановить, зная только порожденную им норму:

Упражнение 7 (Тождество поляризации). Пусть R — полуторалинейная форма на векторном пространстве H. Тогда для всех $x, y \in H$ справедливо равенство

$$R(x,y) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k R(x + i^k y, x + i^k y).$$

А теперь — основное определение:

Определение 3. Предгильбертово пространство, полное относительно нормы $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, называется *гильбертовым.*

Пример 6. Пространства $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ и ℓ^2 — гильбертовы (см. лекцию 6, упр. 8).

Упражнение 8. Пусть H — предгильбертово пространство, $\widetilde{H}$ — его пополнение. Тогда норма в $\widetilde{H}$ порождается единственным скалярным произведением, которое продолжает скалярное произведение в H. (Говоря неформально, пополнение предгильбертова пространства — гильбертово пространство).

Пример 7. Пространство $L^2(X, \mu)$ — гильбертово.

Ортогональные разложения.

Познакомимся теперь поближе со строением гильбертовых пространств. Пусть H — (пока что) предгильбертово пространство.

Определение 4. Векторы $x, y \in H$ называются *ортогональными* (пишут $x \perp y$), если $\langle x, y\rangle = 0$. Множества $M, N \subset H$ *ортогональны* (пишут $M \perp N$), если $x \perp y$ для всех $x \in M,\ y \in N$. Система векторов $\{x_i\}_{i\in I} \subset H$ называется *ортогональной*, если $x_i \perp x_j$ при $i \neq j$.

Упражнение 9. 1) Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.
2) Если $\{x_i\}_{i=1}^n$ — конечная ортогональная система, и $x = \sum_i x_i$, то $\|x\|^2 = \sum_i \|x_i\|^2$ (*«Теорема Пифагора»*).
3) Ортогональная система ненулевых векторов в сепарабельном предгильбертовом пространстве не более чем счетна.

Определение 5. Пусть $x \in H$, и пусть H_0 — векторное подпространство в H. Вектор $y \in H_0$ называется *проекцией* x на H_0, если $x - y \perp H_0$.

Напомним, что в произвольном метрическом пространстве (X, ρ) *расстоянием* от точки $x \in X$ до множества $Y \subset X$ называется величина $\rho(x, Y) = \inf\{\rho(x, y) : y \in Y\}$. Геометрическая интуиция подсказывает, что расстояние от вектора $x \in H$ до подпространства $H_0 \subset H$ — это длина перпендикуляра, опущенного из x на H_0. Так оно и есть:

Предложение 3. *Вектор $y \in H_0$ является проекцией x на H_0 тогда и только тогда, когда $\|x - y\| = \rho(x, H_0)$ (т.е. когда y — элемент из H_0, ближайший к x).*

Доказательство. ($\Longrightarrow$). Из теоремы Пифагора следует, что для каждого $z \in H_0$

$$\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geqslant \|x - y\|^2,$$

т.е. $\|x - y\| = \rho(x, H_0)$.

($\Longleftarrow$). Возьмем $z \in H_0$ и рассмотрим функцию $\varphi(t) = \|x-y+tz\|^2$ ($t \in \mathbb{R}$). Заметим, что $\varphi(t) = \|x - y\|^2 + 2t \operatorname{Re}\langle x - y, z\rangle + t^2\|z\|^2$. По условию, φ имеет минимум при $t = 0$, откуда $\operatorname{Re}\langle x - y, z\rangle = 0$. Если теперь рассмотреть функцию $\psi(t) = \|x - y + itz\|^2$, то аналогичное рассуждение показывает, что и $\operatorname{Im}\langle x-y, z\rangle = 0$. Следовательно, $\langle x-y, z\rangle = 0$ для любого $z \in H_0$, как и требовалось. $\square$

Обратите внимание: пока что мы ничего не утверждаем о существовании проекций. Вначале — простое необходимое условие:

Упражнение 10. Если каждый вектор $x \in H$ обладает проекцией на подпространство $H_0 \subset H$, то H_0 замкнуто.

В случае полного H верно и обратное:

Теорема 1 (о проекции). *Пусть H — гильбертово пространство, $H_0 \subset H$ — замкнутое линейное подпространство. Тогда для каждого $x \in H$ существует единственный $y \in H_0$, являющийся проекцией x на H_0.*

Доказательство. Положим $d = \rho(x, H_0)$. Ввиду предыдущего предложения, нам достаточно найти элемент $y \in H_0$, для которого $\|x - y\| = d$. Выберем последовательность $\{y_n\} \subset H_0$ так, чтобы $\|x-y_n\| \to d$ при $n \to \infty$, и покажем, что она сходится к нужному нам y.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\|x-y_n\|^2 \leqslant d^2+\varepsilon$ при $n > N$. Применим к векторам $x - y_n$ и $x - y_m$ (где $m, n > N$) тождество параллелограмма:

$$\|y_m - y_n\|^2 = 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - \|2x - y_n - y_m\|^2 =$$
$$= 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\Big\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\Big\|^2 \leqslant 2(d^2 + \varepsilon) + 2(d^2 + \varepsilon) - 4d^2 = 4\varepsilon,$$

поскольку $\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\| \geqslant d$. Отсюда следует, что последовательность $\{y_n\}$ фундаментальна, и поэтому сходится (ввиду полноты H и замкнутости H_0) к некоторому $y \in H_0$. Вспоминая, что $\|x - y_n\| \to d$ при $n \to \infty$, получаем $\|x - y\| = d$, как и требовалось.

Единственность y (не требующую, кстати, полноты H и замкнутости H_0) докажите сами в качестве упражнения. $\square$

Упражнение 11. Покажите, что условие полноты H в последней теореме нельзя убрать.

Определение 6. *Ортогональным дополнением* подмножества $M \subset H$ называется множество $M^\perp = \{y \in H \,:\, y \perp M\}$.

Замечание 1. Мы не случайно используем для ортогонального дополнения тот же символ, что и для аннулятора (см. лекцию 8) — скоро станет ясно, почему.

Следующее упражнение полезно сравнить с упражнением 2 из лекции 8.

Упражнение 12. 1) $M^\perp$ — замкнутое линейное подпространство в H;
2) $\{0\}^\perp = H,\ H^\perp = \{0\}$;
3) $M_1 \subset M_2 \implies M_2^\perp \subset M_1^\perp$;
4) $M^{\perp\perp} \supset M$.

Теорема 2 (об ортогональном разложении). *Пусть H — гильбертово пространство и $H_0 \subset H$ — замкнутое линейное подпространство. Тогда отображение*

$$H_0 \oplus_2 H_0^\perp \to H, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

— изоморфизм в $\mathscr{B}an_1$.

Доказательство. Изометричность указанного отображения следует из теоремы Пифагора, а биективность — из теоремы о проекции. □

Упражнение 13. (Ср. упражнение 11).

1) Выведите из последней теоремы, что $H_0^{\perp\perp} = \overline{H_0}$ для любого (не обязательно замкнутого) линейного подпространства $H_0 \subset H$.

2) Приведите пример, показывающий, что ни теорема об ортогональном разложении, ни п.1) из этого упражнения не обобщаются на неполные предгильбертовы пространства.

Следствие 1. *Любое замкнутое подпространство гильбертова пространства дополняемо.*

Замечание 2. Любопытно, что последнее следствие на самом деле характеризует гильбертовы пространства: как показали Линденштраусс и Цафрири, если в банаховом пространстве всякое замкнутое подпространство дополняемо, то оно изоморфно в $\mathscr{B}an$ некоторому гильбертову пространству.

Теперь мы можем описать, как устроены непрерывные линейные функционалы на гильбертовом пространстве. Напомним, что отображение $\varphi\colon X \to Y$ между комплексными векторными пространствами называется *антилинейным*, если $\varphi(\lambda x + \mu y) = \bar\lambda\varphi(x) + \bar\mu\varphi(y)$ для всех $x, y \in X$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Теорема 3 (Рисс). *Пусть H — гильбертово пространство. Рассмотрим отображение $J\colon H \to H^*$, переводящее каждый $y \in H$ в функционал F_y, действующий по правилу $F_y(x) = \langle x, y\rangle$. Тогда J антилинейно, биективно и изометрично.*

Доказательство. Линейность F_y очевидна; его ограниченность и равенство $\|F_y\| = \|y\|$ сразу следуют из неравенства Коши-Буняковского и того, что $F_y(y) = \|y\|^2$. Поэтому J корректно определено и (с учетом его очевидной антилинейности) изометрично.

Пусть теперь $f \in H^*$ — ненулевой функционал. Положим $H_0 = \operatorname{Ker} f$. По теореме об ортогональном разложении, $H = H_0 \oplus H_0^\perp$. Поскольку $f\colon H \to \mathbb{C}$ сюръективен, имеем $H_0^\perp \cong H/H_0 \cong \mathbb{C}$ (ср. упр. 25 из лекции 7), откуда $\dim H_0^\perp = 1$. Зафиксируем любой ненулевой $x_0 \in H_0$ и подберем $\lambda \in \mathbb{C}$ так, чтобы $f = F_{\lambda x_0}$. Для этого заметим, что для любого λ оба функционала f и $F_{\lambda x_0}$ обращаются в нуль на H_0. Поэтому для равенства $f = F_{\lambda x_0}$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x_0) = F_{\lambda x_0}(x_0)$. Последнее же означает в точности, что $f(x_0) = \bar\lambda \|x_0\|^2$. Таким образом, $f = F_{\lambda x_0}$ для $\lambda = \overline{f(x_0)}/\|x_0\|^2$. Отсюда следует, что J сюръективно. Дальше ясно. $\square$

Замечание 3. Обратите внимание, что, хотя теорема Рисса и позволяет отождествить H и H^*, это отождествление не является изоморфизмом в $\mathscr{B}an_1$: оно *антилинейно.* Впрочем, изоморфизм между H и H^* все же существует, хотя и не канонический. Для случая сепарабельного H мы вскоре в этом убедимся.

Упражнение 14. Докажите, что гильбертово пространство рефлексивно.

Упражнение 15. Используя теорему Рисса, установите взаимосвязь между понятием ортогонального дополнения и понятиями аннулятора и преданнулятора из лекции 8. Покажите, в частности, что $H_0^{\perp\perp} = \overline{H_0}$ для любого линейного подпространства H_0 в гильбертовом пространстве H. Верно ли последнее утверждение, если H — неполное предгильбертово пространство?

Изоморфизм предгильбертовых пространств.

Какие предгильбертовы пространства следует считать «одинаковыми»? Кажется разумным отождествить предгильбертовы пространства, если между ними существует биективное отображение, сохраняющее все имеющиеся дополнительные структуры — в данном случае, структуру векторного пространства и скалярное произведение.

Определение 7. Линейный оператор $U\colon H_1 \to H_2$ между предгильбертовыми пространствами называется *унитарным*, если U биективен и $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ для всех $x, y \in H_1$. Предгильбертовы пространства называются *изоморфными* (более точно — *унитарно изоморфными*), если между ними существует унитарный оператор.

Является ли введенное понятие частным случаем категорного понятия изоморфизма? Оказывается, да:

Упражнение 16. Линейный оператор $U\colon H_1 \to H_2$ сохраняет скалярные произведения (т.е. обладает свойством $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ для всех $x, y \in H_1$) $\iff$ он изометричен.

Таким образом, унитарный изоморфизм предгильбертовых пространств — это в точности изоморфизм в категории $\mathscr{N}orm_1$.

Пример 8. Пусть $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ — единичная окружность в $\mathbb{C}$, снабженная мерой «длина дуги, деленная на 2π». Иными словами, мера на $\mathbb{T}$ соответствует интегралу $f \mapsto \frac{1}{2\pi}\int f\,d\varphi$ на $C(\mathbb{T})$. (Можно сказать и по-другому: мера на $\mathbb{T}$ вводится по правилу $\mu(B) = \frac{1}{2\pi}\lambda(\psi^{-1}(B))$, где B — борелевское подмножество $\mathbb{T}$, отображение $\psi\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{T}$ задано формулой $\psi(t) = e^{it}$, а λ — обычная мера Лебега на отрезке.) Положим $H_1 = L^2(\mathbb{T})$ и $H_2 = L^2[-\pi,\pi]$; тогда, как нетрудно убедиться, оператор $U\colon H_1 \to H_2$, $(Uf)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(e^{it})$ — унитарный изоморфизм.

Замечание 4. Обратите внимание, что функция $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ интегрируема $\iff$ функция $f \circ \psi\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ интегрируема, и их интегралы совпадают с точностью до скалярного множителя (не зависящего, конечно, от f). Точно так же можно отождествить и все остальные L^p-пространства на отрезке и окружности. Так что с точки зрения теории меры и интегрирования отрезок и окружность — это одно и то же. Поэтому теория меры — наука в определенном смысле «более грубая», чем, скажем, топология.

Где об этом почитать. Материал сегодняшней (как и следующей) лекции — это, пожалуй, «самая классическая» часть функционального анализа, поэтому обо всем этом написано в любом стандартном учебнике (Колмогоров/Фомин, Кириллов/Гвишиани, Рид/Саймон …) — см. литературные указания к предыдущим лекциям. По поводу замечания 4 и понятия изоморфизма пространств с мерой см. книгу Халмоша «Теория меры». Много полезной информации о гильбертовых пространствах есть в книгах того же Халмоша «Гильбертово пространство в задачах» и (для конечномерного случая) «Конечномерные векторные пространства».