Лекция 13.
Ортонормированные базисы. Теорема об изоморфизме.

В отличие от общих банаховых пространств, гильбертовы пространства, благодаря своим замечательным геометрическим свойствам (см. прошлую лекцию), поддаются полной классификации. Сегодня наша ближайшая цель — доказать, что все бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны друг другу. В линейной алгебре изоморфизм между пространствами одинаковой размерности строится путем выбора базиса. Как мы вскоре увидим, похожую конструкцию можно применить и к гильбертовым пространствам.

Пусть H — (пока что) предгильбертово пространство.

Определение 1. Система векторов $\{e_i\}_{i\in I} \subset H$ называется *ортонормированной*, если $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ для всех $i, j \in I$.

Иными словами, ортонормированная система — это ортогональная система векторов единичной длины.

Пример 1. Пусть $H = \ell^2$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $e_n \in \ell^2$ последовательность с единицей на n-ом месте и нулями на остальных. Очевидно, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ортонормированная система.

В следующих трех примерах описана, по сути, одна и та же система, но «в разных обличьях».

Пример 2 (тригонометрическая система). Пусть $H = L^2[-\pi, \pi]$ и $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$. Тогда $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированная система.

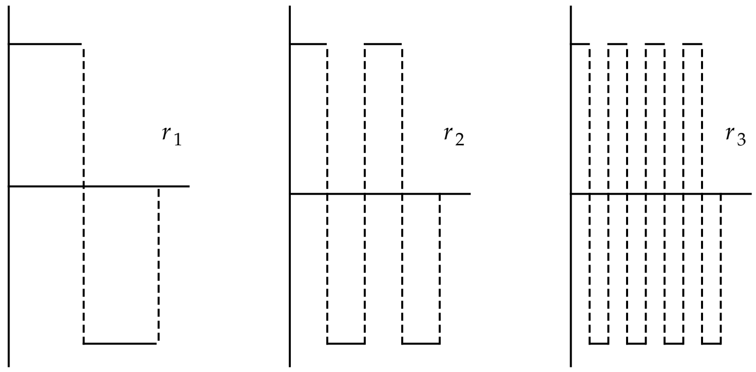
Пример 3 (тригонометрическая система). Пусть снова $H = L^2[-\pi, \pi]$. Как нетрудно убедиться, система функций $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kt, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kt\}_{k\in\mathbb{N}}$ — ортонормированная. Обратите внимание, что она совпадает с системой $\{e_0, \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k + e_{-k}), \frac{1}{\sqrt{2}}(e_k - e_{-k})\}_{k\in\mathbb{N}}$, где $\{e_n\}$ — система из предыдущего примера.

Пример 4 (тригонометрическая система). Пусть $H = L^2(\mathbb{T})$ и $e_n(z) = z^n$. Тогда $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированная система. Эта система соответствует системе из примера 2 при изоморфизме $U\colon L^2(\mathbb{T}) \to L^2[-\pi, \pi]$, $(Uf)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(e^{it})$ (см. прошлую лекцию).

Замечание 1. (Для знакомых с теорией рядов Фурье). Последние три примера иллюстрируют взаимосвязь между рядами Фурье по синусам и косинусам и рядами Фурье в комплексной форме.

При составлении конспекта использованы неопубликованные записки лекций А. Я. Хелемского «Лекции и упражнения по функциональному анализу» (с согласия автора).

Пример 5 (Система Радемахера). Пусть $H = L^2[0,1]$. Для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ положим $r_n(t) = \operatorname{sign} \sin(2^n \pi t)$:



Как нетрудно проверить, система функций $\{r_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ — ортонормированная. Она называется *системой Радемахера.*

Определение 2. Пусть $\{e_i\}_{i\in I}$ — ортонормированная система в предгильбертовом пространстве H, и пусть $x \in H$. Числа $c_i = \langle x, e_i \rangle$ $(i \in I)$ называются *коэффициентами Фурье* вектора x относительно этой системы.

Рассмотрим теперь следующую задачу. Дана конечная ортонормированная система $e_1, \dots, e_N$ в H, вектор $x \in H$ и вектор $y \in \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_N\}$ (здесь и далее span обозначает линейную оболочку). Как найти расстояние от x до y, зная коэффициенты Фурье x и координаты y относительно e_i-ых? Прямое вычисление (проведите его!) дает такой ответ:

Предложение 1. *Для любой ортонормированной системы $\{e_n\}_{n=1}^N \subset H$, любого $x \in H$ и любых $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$ справедливо равенство*

$$\Big\|x - \sum_{n=1}^N a_n e_n\Big\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^N |c_n|^2 + \sum_{n=1}^N |a_n - c_n|^2,$$

где $\{c_n\}$ — коэффициенты Фурье x относительно $\{e_n\}$.

Следствие 1. *В условиях предыдущего предложения положим $H_N = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_N\}$ и обозначим через $\operatorname{Pr}_{H_N} x$ проекцию x на H_N (см. прошлую лекцию). Тогда*

1) $\rho(x, H_N)^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^N |c_n|^2$;

2) $\operatorname{Pr}_{H_N} x = \sum_{n=1}^N c_n e_n$;

3) $\|\operatorname{Pr}_{H_N} x\|^2 = \sum_{n=1}^N |c_n|^2$.

Замечание 2. Обратите внимание, что здесь проекция x на H_N существует вне зависимости от того, полно H или нет (ср. упр. 11 из прошлой лекции).

Следствие 2 (неравенство Бесселя). *Пусть $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — счетная ортонормированная система в предгильбертовом пространстве H, и пусть $\{c_n\}$ — коэффициенты Фурье вектора $x \in H$ относительно этой системы. Тогда ряд $\sum_n |c_n|^2$ сходится, и $\sum_n |c_n|^2 \leqslant \|x\|^2$.*

Доказательство. Правая часть в формуле 1) из следствия 1 неотрицательна. □

Упражнение 1. Выведите неравенство Коши-Буняковского из неравенства Бесселя.

Обсудим теперь, как строить ортонормированные системы.

Предложение 2 (об ортогонализации). *Пусть H — предгильбертово пространство, $\{x_n\}$ — конечная или счетная линейно независимая система. Для каждого n положим $H_n = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Тогда существует ортонормированная система $\{e_n\}$, такая, что* $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\} = H_n$ *для всех n.*

Доказательство. По теореме об ортогональном разложении (см. прошлую лекцию), $H_n = H_{n-1} \oplus (H_{n-1}^\perp \cap H_n)$ для каждого $n \geqslant 2$. Ввиду линейной независимости $\{x_n\}$, $H_{n-1} \neq H_n$. Поэтому достаточно положить $e_1 = x_1/\|x_1\|$, а при $n \geqslant 2$ взять в качестве e_n любой вектор единичной длины из $H_{n-1}^\perp \cap H_n$. □

Замечание 3. Поскольку $\dim(H_{n-1}^\perp \cap H_n) = 1$, каждый из векторов e_n определен однозначно с точностью до скалярного множителя, равного по модулю единице.

Замечание 4. Вероятно, из курса линейной алгебры Вы знаете, что существует простой алгоритм, позволяющий находить e_n-ые по x_n-ым. А именно, на первом шаге положим $e_1 = x_1/\|x_1\|$. Если теперь $e_1, \dots, e_n$ уже построены, то вектор

$$\tilde{e}_{n+1} = x_{n+1} - \operatorname{Pr}_{H_n} x_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle x_{n+1}, e_k \rangle e_k$$

ортогонален H_n и лежит в H_{n+1}. Остается положить $e_{n+1} = \tilde{e}_{n+1}/\|\tilde{e}_{n+1}\|$. Этот способ построения системы $\{e_n\}$ называется *процессом ортогонализации Грама-Шмидта.*

Пример 6. Пусть $H = L^2(\mathbb{R})$ и $x_n(t) = t^n e^{-t^2/2}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$. После ортогонализации системы $\{x_n\}$ получается ортогональная система функций $\{h_n\} \subset L^2(\mathbb{R})$, называемая *системой Эрмита.*

Предупреждение. В дальнейшем мы для наглядности будем работать с сепарабельными (пред)гильбертовыми пространствами, хотя все, о чем пойдет речь, несложно перенести на общий случай. Впрочем, большинство гильбертовых пространств, важных для различных задач анализа, геометрии и математической физики, именно таковы. Чтобы убедиться в этом, сделайте следующее

Упражнение 2. Пространства $L^2[a,b]$, $L^2(\mathbb{T})$ и $L^2(\mathbb{R})$ сепарабельны.

Итак, пусть H — сепарабельное предгильбертово пространство. Напомним (см. прошлую лекцию),что в этом случае любая ортонормированная система в H не более чем счетна. По аналогии с базисом в конечномерном пространстве, нам хотелось бы научиться строить «достаточно большую» ортонормированную систему $\{e_n\}$ в H. Конечно, если H — бесконечномерное гильбертово пространство, то требовать, чтобы $H = \operatorname{span}\{e_n\}$, бессмысленно (см. упр. 7 из лекции 6). Вот более разумное требование:

Определение 3. Пусть X — нормированное пространство. Подмножество $M \subset X$ называется *тотальным* в X, если $\overline{\operatorname{span} M} = X$.

Упражнение 3. 1) Пусть H — гильбертово пространство. Тогда подмножество $M \subset H$ тотально $\iff$ $M^\perp = \{0\}$.
2) Верно ли это в предгильбертовом пространстве?

Упражнение 4. Докажите, что тригонометрическая система тотальна в $L^2[-\pi, \pi]$ (или, смотря по смыслу, в $L^2(\mathbb{T})$).

Теорема 1. *Пусть H — сепарабельное предгильбертово пространство. Тогда в H существует не более чем счетная тотальная ортонормированная система.*

Доказательство. Поскольку H сепарабельно, у него есть плотное линейное подпространство H_0 не более чем счетной размерности (см. упр. 5 из лекции 5). Выберем алгебраический базис $\{x_n\}$ в H_0 и применим к нему процесс ортогонализации (предложение 2). В результате получим нужную систему. $\square$

Замечание 5. Разумеется, система, о которой идет речь в теореме, будет конечной тогда и только тогда, когда H конечномерно (почему?)

Теорема 2. *Пусть H — сепарабельное предгильбертово пространство, $\{e_n\}$ — тотальная ортонормированная система в H. Тогда*

1) *Каждый $x \in H$ представим в виде $x = \sum_n c_n e_n$, где $c_n = \langle x, e_n \rangle$* (ряд Фурье)*;*

2) *Если $x = \sum_n a_n e_n$, то $a_n = c_n$* (единственность ряда Фурье)*;*

3) $\|x\|^2 = \sum_n |c_n|^2$ (равенство Парсеваля)*;*

4) *Если $x = \sum_n c_n e_n$ и $y = \sum_n d_n e_n$, то $\langle x, y \rangle = \sum_n c_n \bar{d}_n$.*

Доказательство. 1) Как и выше, для каждого N положим $H_N = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_N\}$. Тогда, ввиду предложения 1 и следствия 1, $\|x - \sum_{n=1}^N c_n e_n\| = \rho(x, H_N)$. Поскольку последовательность $\rho(x, H_N)$ монотонно убывает, она стремится к некоторому пределу, равному, очевидно, $\rho(x, \cup_N H_N)$. Но $\cup_N H_N$ плотно в H ввиду тотальности системы $\{e_n\}$; отсюда $\|x - \sum_{n=1}^N c_n e_n\| \to 0$ при $N \to \infty$, т.е. $x = \sum_n c_n e_n$.

Утверждения 2) и 4) легко следуют из 1) и непрерывности скалярного произведения, а 3) — это частный случай 4). $\square$

Следствие 3 (тригонометрический ряд Фурье). *Каждая $f \in L^2[-\pi, \pi]$ представима в виде суммы сходящегося по L^2-норме ряда*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad \text{где } \; c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

В случае гильбертовых пространств тотальные ортонормированные системы носят специальное название:

Определение 4. Тотальная ортонормированная система в гильбертовом пространстве называется его *ортонормированным базисом.*

Пример 7. Ортонормированная система $\{e_n\}$ из примера 1 является, очевидно, ортонормированным базисом в ℓ^2. Она называется *стандартным базисом.*

Упражнение 5. 1) Ортонормированная система в гильбертовом пространстве тотальна $\iff$ она максимальна.
2) Верно ли это в предгильбертовом пространстве?

Согласно предыдущей теореме, по ортонормированному базису в сепарабельном гильбертовом пространстве можно единственным образом разложить любой вектор — примерно так же, как и по алгебраическому базису, только конечная сумма теперь заменяется на сумму ряда. А какие последовательности коэффициентов Фурье могут при этом получиться? Из неравенства Бесселя мы знаем, что только те, которые квадратично суммируемы, т.е. лежат в ℓ^2. Оказывается — и тут как раз и понадобится полнота — что верно и обратное:

Теорема 3 (Рисс, Фишер). *Пусть H — сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство, $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в H. Тогда оператор $U\colon H \to \ell^2$, сопоставляющий каждому $x \in H$ последовательность $\{\langle x, e_n\rangle\}$ его коэффициентов Фурье, является унитарным изоморфизмом H на ℓ^2.*

Доказательство. То, что U — корректно определенный линейный оператор, сохраняющий скалярные произведения, сразу следует из предыдущей теоремы. Очевидно также, что $\operatorname{Im} U$ содержит все финитные последовательности и поэтому плотен в ℓ^2. С другой стороны, $\operatorname{Im} U$ замкнут ввиду полноты H и топологической инъективности U (ср. замечание 2 из лекции 7). Дальше ясно. $\square$

Следствие 4. *Для любой последовательности $(c_n) \in \ell^2$ существует единственный вектор $x \in H$, такой, что $c_n = \langle x, e_n\rangle$ для всех n.*

Пример 8 (из квантовой механики). Можно показать (мы с Вами этим заниматься не будем), что система функций Эрмита $\{h_n\}$ (см. пример 6) тотальна в $L^2(\mathbb{R})$. Отсюда следует, что существует единственный унитарный изоморфизм $L^2(\mathbb{R}) \to \ell^2$, переводящий функции Эрмита в стандартный базис $\{e_n\} \subset \ell^2$. Этот изоморфизм, говоря нестрого, осуществляет эквивалентность «волновой квантовой механики» Шредингера и «матричной квантовой механики» Гейзенберга. Об этом можно почитать в книгах Рида и Саймона «Методы современной математической физики» и Эмха «Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля»; см. также введение к книге Браттели и Робинсона «Операторные алгебры и квантовая статистическая механика».

Упражнение 6. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Докажите, что $H \cong H^*$ в $\mathscr{B}an_1$ (хотя изоморфизм — не канонический; ср. замечание после теоремы Рисса из предыдущей лекции).

Замечание 6. Конечно, теорема Рисса-Фишера верна и для конечномерных гильбертовых пространств. В этом случае она дает унитарный изоморфизм $H \cong (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$, где $n = \dim H$.

Таким образом, теорема Рисса-Фишера полностью решает задачу о классификации объектов категории $\mathscr{S}ep\mathscr{H}ilb$, объекты которой — сепарабельные гильбертовы пространства, а морфизмы — ограниченные линейные операторы (см. лекцию 3). Полная система инвариантов изоморфизма в этом случае — это множество $\mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$, «отображение» $I\colon \mathrm{Ob}(\mathcal{S}ep\mathscr{H}ilb) \to \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ сопоставляет каждому пространству его размерность, если оно конечномерно, и ∞ в противном случае, а «модельные» пространства — это $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ и ℓ^2.

Замечание 7. Если аккуратно определить, что такое «безусловно сходящийся ряд с несчетным множеством индексов» (ср. упражнение 7 из лекции 2; попробуйте это сделать!), то после этого несложно убедиться, что все сказанное выше обобщается на случай произвольных (т.е. не обязательно сепарабельных) гильбертовых пространств. В частности, теорема Рисса-Фишера дает изоморфизм $H \cong \ell^2(S)$, где S — индексное множество, мощность которого равна мощности (любого) ортонормированного базиса в H (*гильбертовой размерности* H).

Операторы в гильбертовом пространстве.

Итак, объекты — гильбертовы пространства — полностью описаны. Поговорим теперь о морфизмах, т.е. об ограниченных линейных операторах между ними.

Об операторах между гильбертовыми пространствами известно хотя и далеко не все, но все же намного больше, чем об операторах между произвольными банаховыми пространствами. Основная причина этого в том, что скалярное произведение позволяет ввести дополнительную операцию над операторами между гильбертовыми пространствами — так называемую *инволюцию*.

Напомним (см. прошлую лекцию), что теорема Рисса задает биекцию $J_H\colon H \to H^*$ между гильбертовым пространством H и его сопряженным. Эта биекция изометрична, антилинейна и определяется формулой $J_H(y)(x) = \langle x, y\rangle$ $(x, y \in H)$.

Определение 5. Пусть $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ — ограниченный оператор между гильбертовыми пространствами. Оператор $T^+ = J_{H_1}^{-1} T^* J_{H_2}\colon H_2 \to H_1$ называется *эрмитово сопряженным* к T.

Таким образом, оператор T^+ определяется коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} H_1^* & H_2^* \arrow[l, "T^*"'] \\ H_1 \arrow[u, "J_{H_1}"] & H_2 \arrow[l, "T^+"] \arrow[u, "J_{H_2}"'] \end{tikzcd}$$

Легко видеть, что данное определение T^+ эквивалентно следующему:

Упражнение 7. T^+ — это единственное отображение из H_2 в H_1, удовлетворяющее соотношению $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^+y\rangle$ для всех $x \in H_1,\ y \in H_2$.

Из линейности T^* и антилинейности и изометричности J_{H_1} и J_{H_2} сразу следует

Предложение 3. *Оператор $T^+\colon H_2 \to H_1$ линеен, ограничен, и $\|T^+\| = \|T\|$.*

В дальнейшем, как это и принято, мы будем писать T^* вместо T^+ и называть этот оператор сопряженным к T (опуская слово «эрмитово»); путаницы это не вызовет.

Рассматривая операторы, действующие в каком-то одном гильбертовом пространстве H, мы получаем операцию $*\colon \mathscr{B}(H) \to \mathscr{B}(H)$, $T \mapsto T^*$ на алгебре $\mathscr{B}(H)$. Посмотрим, какими свойствами она обладает.

Предложение 4. *Пусть* $S, T \in \mathscr{B}(H)$ *и* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. *Тогда*

1) $(\lambda S + \mu T)^* = \bar{\lambda} S^* + \bar{\mu} T^*$;
2) $(ST)^* = T^* S^*$;
3) $T^{**} = T$;
4) $\|T^*\| = \|T\|$;
5) $\|T^* T\| = \|T\|^2$.

Доказательство. Свойство 4) уже упоминалось выше, а доказательство 1)–3) — простое упражнение. Докажем 5). С одной стороны, $\|T^*T\| \leqslant \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$ ввиду 4). С другой стороны,

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leqslant \|T^*Tx\|\|x\| \leqslant \|T^*T\|\|x\|^2$$

для всех $x \in H$. Отсюда следует противоположное неравенство. □

Замечание 8. Ассоциативная $\mathbb{C}$-алгебра, на которой введена операция $*$ со свойствами 1)–3), называется *инволютивной алгеброй*, а сама операция — *инволюцией*. Банахова алгебра с инволюцией называется *инволютивной банаховой алгеброй*, если выполнено 4). Наконец, C^**-алгебра* — это инволютивная банахова алгебра, в которой справедливо тождество 5). Само это тождество называется C^**-тождеством.*

Определение 6. Оператор $T \in \mathscr{B}(H)$ называется *самосопряженным*, если $T^* = T$.

Нетрудно проверить (проверьте, если впервые об этом слышите), что в конечномерном случае оператор T самосопряжен $\iff$ его матрица в некотором (или, что эквивалентно, в любом) ортонормированном базисе эрмитова, т.е. удовлетворяет равенству $T_{ij} = \overline{T}_{ji}$ при всех i, j.

Посмотрим теперь, как инволюция действует на конкретные операторы.

Упражнение 8. Опишите сопряженные к следующим операторам, и выясните, какие из них самосопряжены:

1) диагональный оператор в ℓ^2;
2) правый и левый сдвиги в ℓ^2;
3) двусторонний сдвиг в $\ell^2(\mathbb{Z})$;
4) оператор умножения на ограниченную борелевскую функцию в $L^2(X, \mu)$;
5) оператор неопределенного интегрирования в $L^2[a, b]$.

Замечание 9. Все операторы из предыдущего упражнения, за исключением 4) и 5), обсуждались на лекции 3. Что же касается операторов из 4) и 5), то попробуйте их определить, руководствуясь примерами 3 и 5 из лекции 3. Для оператора умножения на ограниченную борелевскую функцию посчитайте также его норму. (Предостережение: ответ будет не совсем такой, как для оператора умножения на непрерывную функцию из лекции 3).

Как мы вскоре увидим, инволюция на $\mathscr{B}(H)$ позволяет описать многие геометрические свойства линейных операторов в алгебраических терминах.

Определение 7. Оператор $P \in \mathscr{B}(H)$ называется *ортопроектором*, если существует замкнутое линейное подпространство $H_0 \subset H$, такое, что $P|_{H_0} = \mathbf{1}_{H_0}$ и $P|_{H_0^\perp} = 0$.

Из теоремы об ортогональном разложении (см. прошлую лекцию) следует, что для каждого замкнутого линейного подпространства $H_0 \subset H$ существует (очевидно, единственный) ортопроектор на H_0. Поэтому говорить о замкнутых подпространствах в H — это все равно, что говорить об ортопроекторах.

Упражнение 9. 1) $P \in \mathscr{B}(H)$ — ортопроектор $\iff$ $P^2 = P^* = P$;
2) $T \in \mathscr{B}(H)$ изометричен $\iff$ $T^*T = \mathbf{1}_H$;
3) $T \in \mathscr{B}(H)$ коизометричен $\iff$ $TT^* = \mathbf{1}_H$;
4) $U \in \mathscr{B}(H)$ унитарен $\iff$ U обратим и $U^{-1} = U^*$.

Упражнение 10. Оператор $V \in \mathscr{B}(H)$ называется *частичной изометрией*, если $(V^*V)^2 = V^*V$. Дайте геометрическое описание таких операторов.

Упражнение 11. Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$, $H_0 \subset H$ — замкнутое подпространство и P — ортопроектор на H_0. Запишите в виде алгебраического тождества (включающего T и P) следующие утверждения:
1) $T(H_0) \subset H_0$;
2) $T(H_0) \subset H_0$ и $T(H_0^\perp) \subset H_0^\perp$.

Какие операторы в гильбертовых пространствах естественно считать «одинаковыми»? Общая концепция, о которой шла речь на лекции 3, подсказывает ответ:

Определение 8. Операторы $S \in \mathscr{B}(H_1)$ и $T \in \mathscr{B}(H_2)$ называются *унитарно эквивалентными*, если существует унитарный изоморфизм $U\colon H_1 \to H_2$, такой, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, "S"] \arrow[d, "U"'] & H_1 \arrow[d, "U"] \\ H_2 \arrow[r, "T"] & H_2 \end{tikzcd}$$

Обозначим через $\mathscr{H}ilb$ полную подкатегорию в $\mathscr{B}an$, объектами которой являются гильбертовы пространства. Аналогично определим полную подкатегорию $\mathscr{H}ilb_1$ в $\mathscr{B}an_1$. Тогда, с учетом упражнения 16 из прошлой лекции, унитарная эквивалентность операторов — это в точности их изоморфизм как объектов категории $\mathscr{E}nd_{\mathscr{H}ilb_1}\mathscr{H}ilb$ (см. лекцию 3).

Упражнение 12. Докажите, что следующие три оператора унитарно эквивалентны:

1) двусторонний сдвиг T_b в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z})$;
2) оператор T_e в $L^2[-\pi, \pi]$, действующий по правилу $(T_e f)(t) = e^{it} f(t)$;
3) оператор T_z в $L^2(\mathbb{T})$, действующий по правилу $(T_z f)(z) = z f(z)$.

Мораль предыдущего упражнения такова: у оператора двустороннего сдвига в $\ell^2(\mathbb{Z})$ есть *функциональная модель* — оператор умножения T_e или же T_z. В общем случае под функциональной моделью заданного оператора $T \in \mathscr{B}(H)$ понимают оператор умножения на какую-либо функцию, действующий в каком-либо функциональном гильбертовом пространстве и унитарно эквивалентный T.

Наличие того или иного у оператора функциональной модели — свойство весьма удобное, позволяющее глубже понять природу этого оператора, узнать, какие у него есть инвариантные подпространства и т.п. Фундаментальный факт, являющийся одной из вершин функционального анализа — это *спектральная теорема* Гильберта, устанавливающая существование функциональной модели у каждого самосопряженного оператора. Сформулируем эту теорему без доказательства.

Теорема 4. *Пусть $T \in \mathscr{B}(H)$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Тогда существуют пространство с мерой (X, μ) и ограниченная измеримая функция f на X, такие, что T унитарно эквивалентен оператору умножения $T_f \in \mathscr{B}(L^2(X, \mu))$, действующему по правилу $g \mapsto fg$.*

Замечание 10. Мы ничего не говорили о том, что такое «пространство с мерой» и как по нему интегрировать; на самом деле, в формулировке теоремы можно считать, что X — локально компактное топологическое пространство, а μ — регулярная борелевская мера на X (см. лекцию 11).

Если H конечномерно, то спектральная теорема превращается в хорошо Вам известную теорему о диагонализации эрмитовых (=самосопряженных) матриц. В самом деле, если $n = \dim H$, а $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — набор собственных значений самосопряженного оператора T (с учетом кратностей), то можно положить $X = \{1, \ldots, n\}$ и задать функцию f по правилу $f(k) = \lambda_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Спектральная теорема верна не только для самосопряженных, но и для *нормальных* операторов (так называют операторы, коммутирующие со своими сопряженными).

Упражнение 13. Какие из операторов, перечисленных в упражнении 8, нормальны, а какие — нет?

В заключение мы на одном важном примере убедимся, что функциональные модели бывают и у некоторых ненормальных операторов.

Определение 9. *Пространство Харди* — это замкнутое подпространство в $L^2(\mathbb{T})$, определяемое следующим образом:

$$H^2 = \{f \in L^2(\mathbb{T}) \,:\, \langle f, z^n \rangle = 0 \quad \forall n < 0\}.$$

Иными словами, H^2 состоит в точности из тех $f \in L^2(\mathbb{T})$, у которых коэффициенты Фурье с отрицательными номерами равны нулю.

То же самое пространство можно определить как некое пространство аналитических функций:

Упражнение 14. Для каждой непрерывной функции f на открытом единичном круге $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ и каждого $0 < \rho < 1$ положим

$$\|f\|_\rho = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\rho e^{it})|^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

Докажите, что определение H^2, данное выше, эквивалентно следующему:

$$H^2 = \{f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C} \,:\, f \text{ голоморфна и } \|f\| = \lim_{\rho \to 1} \|f\|_\rho < \infty\}.$$

Указание. Установите взаимосвязь между тригонометрическими рядами Фурье и рядами Тэйлора.

Упражнение 15. Докажите, что оператор правого сдвига в ℓ^2 унитарно эквивалентен оператору умножения T_z (см. упр. 12) в H^2.

Что же касается оператора левого сдвига, то он, несмотря на кажущуюся схожесть с оператором правого сдвига, никакой разумной функциональной моделью не обладает. Но это уже гораздо более сложный факт, выходящий за рамки нашего курса.

Где об этом почитать. Спектральная теорема в разнообразных эквивалентных формулировках доказана в книгах Кириллова/Гвишиани, Рида/Саймона, Садовничего «Теория операторов», Люстерника и Соболева «Элементы функционального анализа», Данфорда/Шварца (II том) и во многих других. О функциональных моделях общих (т.е. не обязательно нормальных) операторов см. книгу Секефальви-Надя и Фояша «Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве» и Никольского «Лекции об операторе сдвига».