Лекция 2.
Категории нормированных пространств (продолжение).

В прошлый раз мы с Вами определили категории нормированных пространств $\mathscr{N}orm$ и $\mathscr{N}orm_1$. Напомним, что их объекты — все нормированные пространства, а морфизмы таковы:

$$\mathbf{h}_{\mathscr{N}orm}(X,Y) = \mathscr{B}(X,Y);$$
$$\mathbf{h}_{\mathscr{N}orm_1}(X,Y) = \{T \in \mathscr{B}(X,Y) \,;\, \|T\| \leqslant 1\}$$

Конечно, норма оператора не случайно называется нормой:

Предложение 1. *Пусть X и Y — нормированные пространства. Формула*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \,;\, \|x\| \leqslant 1\} = \inf\{C > 0 \,;\, \|Tx\| \leqslant C\|x\| \quad \forall\, x \in X\}$$

задает норму на пространстве $\mathscr{B}(X,Y)$.

Напомним, что (ассоциативной) *алгеброй* над полем $\mathbb{C}$ называется (ассоциативное) кольцо A, снабженное структурой векторного пространства так, что $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и $a, b \in A$.

Определение 1. *Нормированной алгеброй* называется алгебра A, снабженная нормой так, что для некоторого $C > 0$ выполнено неравенство $\|ab\| \leqslant C\|a\|\|b\|$ для всех $a, b \in A$.

Пример 1. Пространство $\mathscr{B}(X) = \mathscr{B}(X,X)$ является нормированной алгеброй.

Напомним, что каждое нормированное пространство X обладает метрикой $\rho(x,y) = \|x - y\|$, а, значит, и топологией.

Упражнение 1. Пусть X — нормированное пространство. Докажите, что операции сложения $X \times X \to X$ и умножения на число $\mathbb{C} \times X \to X$ непрерывны.

Векторное пространство, снабженное топологией, удовлетворяющей этим двум требованиям, называется *топологическим векторным пространством.*

Предложение 2. *Пусть X и Y — нормированные пространства. Следующие свойства линейного оператора $T\colon X \to Y$ эквивалентны:*
1) *T ограничен;*
2) *T непрерывен;*
3) *T непрерывен в 0.*

Итак, основными действующими лицами у нас будут нормированные пространства и ограниченные (=непрерывные) линейные операторы между ними. Познакомимся теперь с ними поближе. Начнем с пространств.

При составлении конспекта существенно использованы неопубликованные записки лекций А. Я. Хелемского «Лекции и упражнения по функциональному анализу» (с согласия автора).

Примеры нормированных пространств.

1. Нормы на конечномерных пространствах. На пространстве $\mathbb{C}^n$ существует хорошо Вам знакомая[1] евклидова норма $\|x\|_2 = \left(\sum_i |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (здесь $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$). Можно ввести также нормы $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ и $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$. Для них аксиомы нормы проверяются непосредственно. Несколько менее очевидно, что для каждого $p \in [1, +\infty)$ формула $\|x\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ тоже задает норму на $\mathbb{C}^n$. Напомним в этой связи два полезных неравенства.

Неравенство Гельдера. Пусть числа $p, q \in (1, +\infty)$ связаны соотношением $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда для любых $x, y \in \mathbb{C}^n$ выполнено

$$\sum_i |x_i y_i| \leqslant \big(\sum_i |x_i|^p\big)^{\frac{1}{p}} \big(\sum_i |y_i|^q\big)^{\frac{1}{q}}$$

Кроме того, для любых интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций f и g

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\, dt \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

Неравенство Гельдера пригодится нам и само по себе, а сейчас нам важно то, что из него нетрудно вывести

Неравенство Минковского. Пусть $p \in [1, +\infty)$. Тогда

$$\big(\sum_i |x_i + y_i|^p\big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \big(\sum_i |x_i|^p\big)^{\frac{1}{p}} + \big(\sum_i |y_i|^p\big)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

для любых $x, y \in \mathbb{C}^n$, и

$$\left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

для любых интегрируемых на $[a, b]$ функций f и g.

Доказательством этих неравенств мы заниматься не будем; их можно найти во многих учебниках матанализа — например, у Зорича. Неравенство Минковского (1) — это в точности неравенство треугольника для нормы $\|\cdot\|_p$ на $\mathbb{C}^n$.

Упражнение 2. Нарисовать единичные шары в $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ для различных p.

… Функциональный анализ замечателен, в частности, тем, что в нем часто одно и то же явление можно выразить на разных языках — алгебраическом и топологическом. Простейшее проявление этого мы уже наблюдали: линейный оператор непрерывен (топологическое понятие) тогда и только тогда, когда он ограничен (свойство, выраженное алгебраическим неравенством). А вот и другой пример. Посмотрите на шары из предыдущего упражнения. Какой из них больше, а какой — меньше? А теперь обобщите это наблюдение:

[1] То, что это действительно норма, обычно доказывают в линейной алгебре. Мы с Вами установим это немного позже и в более общей ситуации.

Упражнение 3. Пусть $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$. Докажите, что

1) $\|\cdot\|_q \leqslant \|\cdot\|_p$ на $\mathbb{C}^n$ (иными словами, единичный шар в норме $\|\cdot\|_p$ сидит в единичном шаре по норме $\|\cdot\|_q$).

2) Найдется константа $C_n > 0$ (зависящая[1] от n!), такая, что $\|\cdot\|_p \leqslant C_n\|\cdot\|_q$ на $\mathbb{C}^n$ (иными словами, единичный шар в норме $\|\cdot\|_q$ попадет в единичный шар по норме $\|\cdot\|_p$, если последний немного раздуть. Однако раздуть придется тем сильнее, чем больше размерность …)

Последнее упражнение служит хорошей иллюстрацией для следующего понятия.

Определение 2. Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две нормы на векторном пространстве X. Говорят, что норма $\|\cdot\|_1$ *мажорирует* норму $\|\cdot\|_2$ (и пишут $\|\cdot\|_1 \succ \|\cdot\|_2$ или $\|\cdot\|_2 \prec \|\cdot\|_1$), если существует константа $C > 0$ такая, что $\|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1$ для каждого $x \in X$. Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ *эквивалентны* ($\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$), если $\|\cdot\|_1 \prec \|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_2 \prec \|\cdot\|_1$.

Предложение 3. *Пусть $\mathscr{T}_i$ — топология на векторном пространстве X, порожденная нормой $\|\cdot\|_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда*

$$\|\cdot\|_1 \succ \|\cdot\|_2 \quad \iff \quad \text{топология } \mathscr{T}_1 \text{ не слабее, чем } \mathscr{T}_2.$$

Как следствие, нормы эквивалентны $\iff$ они задают одну и ту же топологию.

Доказательство получается применением предложения 2.

Замечание 1. Определение 2 можно обобщить на случай метрик ρ_1, ρ_2 на произвольном множестве X ($\rho_2 \prec \rho_1$, если $\rho_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \leqslant C\rho_1(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ для некоторой константы $C > 0$). Однако для метрик аналог последнего предложения неверен. (Придумайте пример двух неэквивалентных метрик на прямой, задающих обычную топологию.) **!**

Упражнение 3 означает, что для любых p, q нормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ на $\mathbb{C}^n$ эквивалентны. Скоро мы убедимся в том, что на $\mathbb{C}^n$ *любые* две нормы эквивалентны. Поэтому с точки зрения категории $\mathscr{N}orm$ (но не $\mathscr{N}orm_1$!) конечномерные пространства одинаковой размерности ничем друг от друга не отличаются — как и в линейной алгебре. Перейдем теперь к бесконечномерным пространствам.

2. Пространства последовательностей. Этим термином мы будем называть векторные подпространства в пространстве $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ всех последовательностей комплексных чисел, снабженные подходящей нормой.

Пример 2. Пространство ℓ^∞ состоит, по определению, из всех ограниченных последовательностей $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Норма на нем вводится так: $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$.

Замечание 2. Если X — (пред)нормированное пространство, то любое его векторное подпространство наделяется (пред)нормой, индуцированной из X, и поэтому само является (пред)нормированным пространством.

Пример 3. Подпространство $c \subset \ell^\infty$ состоит из всех сходящихся последовательностей. Подпространство $c_0 \subset c$ состоит из всех последовательностей, стремящихся к нулю. Норма в c_0 и в c — та же, что и в ℓ^∞. (Заметьте, однако, что для $x \in c_0$ имеем $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$).

[1] Из неравенства Гельдера нетрудно вывести (попробуйте!), что наименьшая возможная константа C_n равна $n^{1/p-1/q}$.

Упражнение 4. Докажите, что c_0 замкнуто в c, а c замкнуто в ℓ^∞.

Пример 4. Для каждого $p \in [1, +\infty)$ пространство ℓ^p состоит, по определению, из тех последовательностей $x = (x_i)$, для которых ряд $\sum_i |x_i|^p$ сходится. Из неравенства Минковского (1) следует, что ℓ^p — векторное пространство, и что формула $\|x\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ задает норму на ℓ^p.

Упражнение 5. 1) Пусть $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$. Докажите, что $\ell^p \subset \ell^q$, и что вложение ℓ^p в ℓ^q непрерывно.

2) Докажите, что $\ell_p \neq \ell_q$ при $p \neq q$.

Замечание 3. Из предыдущего упражнения видно, что пространства ℓ^p образуют цепочку

$$\ell^1 \subset \ldots \subset \ell^p \subset \ldots \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty \qquad (1 < p < +\infty),$$

в которой все вложения — непрерывные инъективные линейные операторы. Такие цепочки (шкалы) — довольно распространенное явление в функциональном анализе. Часто они возникают в связи с задачами математической физики. Такова, например, шкала пространств Соболева (о них см., например, книгу Шубина «Лекции об уравнениях математической физики»).

В отличие от конечномерного случая, на бесконечномерном пространстве может существовать много неэквивалентных норм:

Упражнение 6. Пусть c_{00} — пространство *финитных* последовательностей (т.е. тех последовательностей $x = (x_i)$, для которых $x_i = 0$ при достаточно больших i). Докажите, что при $p \neq q$ нормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ на c_{00} неэквивалентны.

Замечание 4. Последнее упражнение — переформулировка того, что константу C_n из упражнения 3 нельзя выбрать не зависящей от n. На самом деле, оба эти упражнения тесно связаны с тем, что $\ell^p \neq \ell^q$ при $p \neq q$. Мы еще вернемся к этому вопросу, когда будем говорить о пополнениях и о теореме Банаха об обратном операторе.

Конечно, чтобы определить пространства ℓ^p, в качестве множества индексов вместо $\mathbb{N}$ можно использовать любое счетное множество — например, $\mathbb{Z}$. Соответствующие пространства будут обозначаться через $\ell^p(\mathbb{Z})$. Пространство ℓ^∞ можно задать вообще на любом множестве S:

Пример 5. Если S — множество, то через $\ell^\infty(S)$ обозначается пространство всех ограниченных функций на S, снабженное нормой $\|f\|_\infty = \sup_{t\in S} |f(t)|$ (которую иногда называют *равномерной* нормой или просто sup-нормой). В частности, $\ell^\infty(\mathbb{N}) = \ell^\infty$.

Упражнение 7. Придумайте определение пространств $\ell^p(S)$, если S несчетно.

3. Пространства непрерывных функций. Пусть X — топологическое пространство.

Пример 6. Пространство $C_b(X)$ состоит из непрерывных ограниченных функций на X. Норма на нем — та же sup-норма, что и в $\ell^\infty(X)$.

Определение 3. Говорят, что функция $f\colon X \to \mathbb{C}$ *исчезает на бесконечности*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется компакт $K \subset X$, такой, что $|f(t)| < \varepsilon$ при $t \notin K$.

Замечание 5. Если $X = \mathbb{R}$ или $X = \mathbb{N}$, то f исчезает на бесконечности тогда и только тогда, когда $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

Пример 7. Пространство $C_0(X)$ состоит из всех непрерывных функций на X, исчезающих на бесконечности. Ясно, что $C_0(X) \subset C_b(X)$. Как и $C_b(X)$, пространство $C_0(X)$ наделяют (по умолчанию) sup-нормой. Впрочем, если $f \in C_0(X)$, то $\|f\|_\infty = \max_{x\in X} |f(x)|$ (почему?)

В частности, $c_0 = C_0(\mathbb{N})$.

Упражнение 8. Докажите, что $C_b(X)$ замкнуто в $\ell^\infty(X)$, а $C_0(X)$ — в $C_b(X)$.

Замечание 6. Если X компактно, то все непрерывные функции на нем ограничены, так что $C_b(X) = C_0(X) = C(X)$. Очень важный частный случай — пространство $C[a,b]$ непрерывных функций на отрезке.

4. L^p-нормы на $C[a,b]$. Кроме равномерной, на пространстве $C[a,b]$ можно ввести и другие нормы.

Пример 8. Для каждого $p \in [1,+\infty)$ формула

$$\|f\|_p = \Big(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\Big)^{\frac{1}{p}}$$

задает норму на $C[a,b]$ (см. неравенство Минковского (2)).

Упражнение 9. Докажите, что при $p \neq q$ нормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ на $C[a,b]$ не эквивалентны друг другу.

Замечание 7. Отметим, что эти нормы на $C[a,b]$ в некотором смысле «менее естественны», чем равномерная норма. (Забегая вперед, скажем, почему: в равномерной норме $C[a,b]$ полно, а в нормах $\|\cdot\|_p$ при $p < \infty$ — нет.) Немного позже мы введем пространства $L^p[a,b]$, содержащие в себе $C[a,b]$ и являющиеся «естественной областью определения» для норм $\|\cdot\|_p$.

Пример 9. Пространство $C^n[a,b]$ n раз непрерывно дифференцируемых функций на $[a,b]$ наделяется нормой

$$\|f\| = \max_{0\leqslant k\leqslant n} \|f^{(k)}\|_\infty$$

Сходимость по этой норме — это равномерная сходимость вместе со всеми (вплоть до n-ой) производными.

Замечание 8. Конечно, $C^n[a,b]$ является нормированным пространством и в равномерной норме, но она «не совсем естественна» для $C^n[a,b]$ (в том же смысле, в каком норма $\|\cdot\|_p$ «не совсем естественна» для пространства $C[a,b]$ при $p < \infty$). Что же касается пространства $C^\infty[a,b]$, то на нем существует «естественная» топология (задающая равномерную сходимость вместе со всеми производными), но ее уже нельзя задать только одной нормой. Мы вернемся к этому вопросу, когда будем говорить о полинормированных пространствах.

Упражнение 10. Все рассмотренные выше пространства последовательностей и функций, кроме $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ при $p < \infty$, являются нормированными алгебрами относительно операции поточечного умножения.

5. Пространства ограниченных операторов.

Пример 10. Если X и Y — нормированные пространства, то пространство $\mathscr{B}(X, Y)$ ограниченных операторов их X в Y, снабженное операторной нормой — тоже нормированное пространство (см. предложение 1).

Теперь, когда у нас есть хороший запас примеров, надо договориться о том, какие нормированные пространства мы будем считать «одинаковыми», а какие — нет. Для этого вернемся ненадолго к общим категорным понятиям.

Понятие изоморфизма в категориях.

Пусть $\mathscr{C}$ — категория и $\varphi\colon X \to Y$ — морфизм в $\mathscr{C}$.

Определение 4. Морфизм $\psi\colon Y \to X$ называется *обратным* к φ, если $\psi \circ \varphi = \mathbf{1}_X$ и $\varphi \circ \psi = \mathbf{1}_Y$.

Упражнение 11. Докажите единственность обратного морфизма.

Морфизм, обратный к φ, обозначается φ^{-1}.

Определение 5. Морфизм $\varphi\colon X \to Y$ называется *изоморфизмом*, если он обладает обратным. Объекты X и Y называются *изоморфными*, если существует изоморфизм из X в Y.

Замечание 9. Легко проверить (проверьте), что отношение изоморфизма есть отношение эквивалентности[1].

Изоморфные объекты принято отождествлять. Говоря неформально, все, что можно сказать об объекте X (оставаясь, конечно, при этом в категории $\mathscr{C}$), можно сказать и о любом объекте, ему изоморфном.

Примеры изоморфизмов. Очевидно, изоморфизм в $\mathscr{S}et$ — это биекция множеств. Изоморфизм в алгебраических категориях $\mathscr{L}in$, $\mathscr{G}r$, $\mathscr{A}b$, $\mathscr{R}ing$ и т.п. — это биективный гомоморфизм. Изоморфизм в топологических категориях $\mathscr{T}op$, $\mathscr{H}\mathscr{T}op$, $\mathscr{M}etr$ — гомеоморфизм; в $\mathscr{D}iff$ — диффеоморфизм. Изоморфизм в гомотопической категории $\mathscr{T}op_h$ — гомотопическая эквивалентность. Изоморфизм в $\mathscr{M}etr_1$ — это биективная *изометрия*, т.е. биективное отображение метрических пространств, сохраняющее расстояния. Изоморфизм в $\mathscr{N}orm$ — это, очевидно, линейный гомеоморфизм (см. предложение 2). Из того же предложения 2 легко вывести следующее:

Предложение 4. *Пусть X и Y — нормированные пространства. Оператор $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ является линейным гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда*

1) *T сюръективен;*

2) *Существуют константы $c, C > 0$, такие, что $c\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant C\|x\|$ для всех $x \in X$.*

[1] Из мехматского фольклора. Экзаменатор: «Скажите, эти две группы изоморфны?» Студент (немного подумав): «Эта — изоморфна, а эта — нет».

Наконец, изоморфизм в $\mathscr{N}orm_1$ — это линейный биективный изометрический оператор. (В самом деле, если $\|T\| \leqslant 1$ и $\|T^{-1}\| \leqslant 1$, то ясно, что $\|Tx\| = \|x\|$ для всех x.)

Возвращаясь к конечномерным пространствам, мы видим, в частности, что при фиксированном n все пространства $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ (а на самом деле — все нормированные пространства одной и той же размерности) изоморфны друг другу в категории $\mathscr{N}orm$. В $\mathscr{N}orm_1$ дела обстоят по-другому:

Упражнение 12. Докажите, что при $1 < p < +\infty$ и $n \geqslant 2$ пространство $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ не изоморфно $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1)$ и не изоморфно $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$ в $\mathscr{N}orm_1$.
Указание. Воспользуйтесь тем, что при $1 < p < +\infty$ единичная сфера в $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ не содержит отрезков. Это эквивалентно тому, что при ненулевых x, y неравенство Минковского $\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$ может обратиться в равенство лишь при $x = \lambda y$. где $\lambda > 0$ — некоторая константа. (Пространства, норма в которых удовлетворяет такому «усиленному» неравенству треугольника, называются *строго нормированными.*) С другой стороны, ни норма $\|\cdot\|_1$, ни норма $\|\cdot\|_\infty$ этим свойством не обладают (ср. упражнение 2).

Замечание 10. На самом деле, при $n \geqslant 2$ и $p \neq q$ пространства $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ и $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_q)$ не изоморфны в $\mathscr{N}orm_1$, однако доказать это, видимо, не так-то просто. (Впрочем, может быть, Вам удастся придумать простое доказательство?)

Таким образом, категория $\mathscr{N}orm_1$ «улавливает» больше свойств нормированных пространств, чем категория $\mathscr{N}orm$. Часто бывает так, что для того, чтобы различить два пространства из категории $\mathscr{N}orm$, полезно исследовать поведение их конечномерных подпространств — но уже в категории $\mathscr{N}orm_1$. Наука, которая этим занимается, называется «локальная теория нормированных пространств».

Где об этом почитать. Все примеры нормированных пространств, которые обсуждались выше, а также многие другие, есть в первом томе книги Данфорда и Шварца «Линейные операторы» (на самом деле, в ней есть почти все, о чем у нас пойдет речь, и много других полезных вещей). Много примеров есть в недавно вышедшей книге Федорова «Теория функций и функциональный анализ». Очень подробно и увлекательно о разных свойствах «классических» нормированных пространств написано в лекциях N. Carothers'a "A short course on Banach space theory"
(`http://personal.bgsu.edu/~carother/`).