Линейный функциональный анализ

Лекция 3.

Вначале выполним обещание, данное на прошлой лекции.

Предложение 1. *На конечномерном пространстве любые две нормы эквивалентны друг другу.*

Доказательство. Пусть $\|\cdot\|$ — какая-то норма на $\mathbb{C}^n$, а $\|\cdot\|_2$ — обычная евклидова норма. Докажем, что они эквивалентны. Выберем ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=1}^n$. Тогда для любого $x \in \mathbb{C}^n$ по неравенству Коши-Буняковского[1] имеем

$$\|x\| = \|\sum_i x_i e_i\| \leqslant \sum_i |x_i| \|e_i\| \leqslant C\|x\|_2 \,,$$

где $C = (\sum_i \|e_i\|^2)^{1/2}$. Следовательно, $\|\cdot\| \prec \|\cdot\|_2$.

Заметим теперь, что функция $f(x) = \|x\|$ непрерывна на $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$. Это следует из неравенства

$$|f(x) - f(y)| = \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\| \leqslant C\|x-y\|_2 \,.$$

Пусть S — единичная сфера в $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ с центром в нуле. Поскольку она компактна, существует $\min_{x\in S} f(x) = a$. Ясно, что $a > 0$ (так как f — норма). Для любого ненулевого x имеем $y = \frac{x}{\|x\|_2} \in S$, поэтому $\|y\| \geqslant a$, откуда $\|x\| \geqslant a\|x\|_2$. Следовательно, $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_2$. $\square$

Упражнение 1. Докажите, что единичная сфера в пространствах ℓ^p, c_0, $C[a,b]$ некомпактна.

Указание. Для доказательства некомпактности метрического пространства достаточно предъявить последовательность $\{x_n\}$ такую, что $\rho(x_n, x_m) > \varepsilon$ для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$ и любых $m \neq n$.

Замечание 1. На самом деле, единичная сфера в бесконечномерном нормированном пространстве никогда не компактна (что мы скоро докажем).

«Классические» примеры линейных операторов.

У нас уже есть достаточный запас примеров нормированных пространств (см. прошлую лекцию). Посмотрим теперь на операторы, которые действуют в этих пространствах.

1. Диагональные операторы в пространствах последовательностей. Пусть $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^\infty$ — ограниченная последовательность, т.е. элемент пространства ℓ^∞. Пусть X — какое-либо из пространств последовательностей ℓ^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ или c_0. Определим *диагональный оператор* $T_\lambda \colon X \to X$ так:

$$T_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n, \dots) \qquad (x = (x_i) \in X)$$

При составлении конспекта существенно использованы неопубликованные записки лекций А. Я. Хелемского «Лекции и упражнения по функциональному анализу» (с согласия автора).

[1]Так называется неравенство Гельдера при $p = q = 2$.

Предложение 2. $T_\lambda \colon X \to X$ — *корректно определенный ограниченный линейный оператор. При этом* $\|T_\lambda\| = \|\lambda\|_\infty$.

Доказательство. Проведем доказательство для $X = \ell^p$ при $p < \infty$ (для ℓ^∞ и c_0 все делается аналогично). Для каждого $x \in \ell^p$ имеем

$$\sum_i |\lambda_i x_i|^p \leqslant \sup_i |\lambda_i|^p \sum_i |x_i|^p = \|\lambda\|_\infty^p \|x\|_p^p .$$

Следовательно, ряд в левой части неравенства сходится, так что $T_\lambda \colon \ell^p \to \ell^p$ корректно определен и, очевидно, линеен. Из того же неравенства видно, что $\|T_\lambda\| \leqslant \|\lambda\|_\infty$. Обозначим через e_i последовательность с единицей на i-ом месте и нулем на остальных. Тогда

$$\|T_\lambda\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|T_\lambda x\| \geqslant \sup_{i \in \mathbb{N}} \|T_\lambda e_i\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \|\lambda_i e_i\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_i| = \|\lambda\|_\infty$$

Отсюда получаем, что $\|T_\lambda\| = \|\lambda\|_\infty$. □

Замечание 2. Из проведенного доказательства видно, что для ограниченного оператора T не обязательно существует такой ненулевой вектор x, что $\|Tx\| = \|T\|\|x\|$. Если такое все же случилось, то говорят, что оператор *достигает нормы*. А в общем случае можно лишь гарантировать, что для каждого $\delta > 0$ найдется такой ненулевой x_δ, что $\|Tx_\delta\| \geqslant (\|T\| - \delta)\|x_\delta\|$.

Упражнение 2. Если последовательность λ неограничена, то T_λ не является оператором из X в X (ни для какого из вышеперечисленных пространств X).

Замечание 3. Последнее предложение можно переформулировать и так: *Отображение* $T \colon \ell^\infty \to \mathscr{B}(X)$, $\lambda \mapsto T_\lambda$ — *изометрический гомоморфизм нормированных алгебр.*

2. Операторы сдвига в пространствах последовательностей. Пусть X таково же, как и в предыдущем примере. Рассмотрим операторы

$$\begin{aligned} &T_r \colon X \to X, \qquad T_r(x) = (0, x_1, x_2, \dots) \qquad &&(\text{оператор } \textit{правого сдвига}) \\ &T_\ell \colon X \to X, \qquad T_\ell(x) = (x_2, x_3, \dots) \qquad &&(\text{оператор } \textit{левого сдвига}) \end{aligned}$$

Ясно, что они оба линейны и ограничены. Оператор T_r даже изометричен (т.е. $\|T_r x\| = \|x\|$ для всех x), так что $\|T_r\| = 1$. Оператор T_ℓ, очевидно, не изометричен (почему?), но все же $\|T_\ell\| = 1$ (почему?)

Если в качестве X взять пространство «двусторонних» последовательностей $\ell^p(\mathbb{Z})$ или $c_0(\mathbb{Z})$, то можно определить оператор

$$T_b \colon X \to X, \quad (T_b(x))_i = x_{i-1} \quad (\text{оператор } \textit{двустороннего сдвига})$$

Очевидно, он изометричен и имеет поэтому норму 1.

3. Операторы умножения на функцию. Обозначим для удобства единичный отрезок $[0,1]$ через I. Пусть $f \in C(I)$ — фиксированная функция, и пусть $X = (C(I), \|\cdot\|_p)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Зададим оператор $T_f \colon X \to X$ формулой $(T_f g)(t) = f(t)g(t)$ $(g \in X,\ t \in I)$. Линейность T_f очевидна. Такое же рассуждение, как и в первом примере, показывает, что T_f ограничен, и что $\|T_f\| \leqslant \|f\|_\infty$.

Упражнение 3. Докажите, что $\|T_f\| = \|f\|_\infty$.
Указание. При $p < \infty$ нужно применить T_f к «высокому узкому пеньку», растущему из той точки, где $|f|$ достигает максимума.

Замечание 4. Результат упражнения можно сформулировать и так: *Отображение* $T\colon (C(I), \|\cdot\|_\infty) \to \mathscr{B}(X)$, $f \mapsto T_f$ *— изометрический гомоморфизм нормированных алгебр.*

4. Интегральные операторы[1]**.** Пусть X таково же, как и в предыдущем примере, и пусть $K \in C(I^2)$ — фиксированная функция. Рассмотрим оператор

$$T\colon X \to X, \quad (Tf)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y)\, dy\,.$$

Он называется *интегральным оператором с ядром*[2] K.

Упражнение 4. 1) Докажите, что T ограничен, и что $\|T\| \leqslant \|K\|_\infty$.
2) Вычислите $\|T\|$ при $p = \infty$.

Замечание 5. Неравенство из п. 1) последнего упражнения — это очень грубая оценка. Часто норму интегрального оператора удается оценить гораздо точнее.

Другой пример интегрального оператора — *оператор неопределенного интегрирования.* Он действует так:

$$T\colon X \to X, \quad (Tf)(x) = \int_0^x f(t)\, dt\,.$$

Упражнение 5. 1) Докажите, что T ограничен, и что $\|T\| \leqslant 1$.
2) Для $p = 1$ и $p = \infty$ докажите, что $\|T\| = 1$.
Указание. При $p = 1$ примените T к «высокому узкому пеньку», растущему вблизи от нуля.

Замечание 6. Впоследствии мы увидим, что при $p = 2$ норма этого оператора равна $2/\pi$.

Задачи о классификации объектов и морфизмов (лирическое отступление).

В какой бы области ни работал математик, его «голубая мечта» — придумать хорошую и по возможности полную классификацию (описание) тех объектов, которые он исследует. В большинстве случаев эта задача безнадежна из-за обилия разных объектов. Тем не менее, иногда удается придумать «частичную» классификацию (не для всех исследуемых объектов, а лишь для некоторых). Кроме того, при попытке решения такой задачи часто удается сопоставить каждому объекту некоторое свойство (инвариант), наличие или отсутствие которого позволяет различать неизоморфные объекты. Посмотрим на простейший пример ситуации, когда задача о классификации решается полностью.

[1] Скорее, это пока еще «суррогат» того, что принято называть интегральными операторами. «Настоящие» интегральные операторы определяются похожим образом, но действуют, как правило, в других пространствах — например, в пространствах L^p, которые у нас скоро появятся. Впрочем, то же замечание относится и к предыдущему примеру.

[2] Слово «ядро» здесь, конечно, не имеет никакого отношения к подпространству, которое оператор переводит в ноль. Ничего не поделаешь — так уж принято называть эту функцию K …

Пример 1. Пусть $\mathscr{C} = \mathscr{FL}in$ — категория конечномерных линейных пространств. Каждому пространству $X \in \mathscr{FL}in$ можно сопоставить число $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а именно, его размерность $\dim X$. Если пространства изоморфны, то их размерности, конечно, совпадают. Это означает, что множество $\mathbb{N} \cup \{0\}$ — *система инвариантов изоморфизма* в категории $\mathscr{FL}in$. При этом, если два пространства неизоморфны, то и их размерности различны (т.е. система инвариантов является *полной*). Наконец, существует простой способ сопоставить каждому $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ «модельный пример» пространства X размерности n — арифметическое n-мерное пространство $\mathbb{C}^n$.

В общем случае программа действий выглядит примерно так. Пусть $\mathscr{C}$ — категория, с которой мы работаем.

1) Предположим, нам удалось найти некое «хорошо изученное» множество M (такое, как $\mathbb{N} \cup \{0\}$ из предыдущего примера) и каждому объекту $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ сопоставить элемент $I(X) \in M$ так, что $X \cong Y$ в $\mathscr{C} \Rightarrow I(X) = I(Y)$. Тогда говорят, что задана *система инвариантов изоморфизма* в $\mathscr{C}$.

2) Если, к тому же, $I(X) \neq I(Y)$ при $X \ncong Y$, то система инвариантов называется *полной*.

3) Наконец, желательно предъявить конструкцию, сопоставляющую каждому $m \in M$ некий «модельный» объект $X_m \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ так, что $I(X_m) = m$ (такой, как $\mathbb{C}^n$ из предыдущего примера).

Если все эти пожелания удалось выполнить — значит, задача о классификации решена полностью. Но и частичное решение (например, когда система инвариантов оказывается неполной) тоже иногда дает много полезной информации о том, насколько много разных объектов в нашей категории и как их различать.

Пример 2. Пусть $\mathscr{C}$ — категория двумерных ориентируемых компактных связных многообразий. Каждое такое многообразие гомеоморфно сфере с ручками, причем сферы с разным количеством ручек не гомеоморфны друг другу. Поэтому полная система инвариантов изоморфизма в $\mathscr{C}$ — множество $\mathbb{N} \cup \{0\}$ (как и в предыдущем примере).

Пример 3. Пусть $\mathscr{C} = \mathscr{A}b_{fg}$ — категория конечно порожденных абелевых групп. Классическая теорема из алгебры утверждает, что любая такая группа изоморфна группе вида

$$\mathbb{Z}^n \oplus \bigoplus_{p \text{ простое}} (\mathbb{Z}_p^{n_{p,1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p^{k_p}}^{n_{p,k_p}}),$$

причем неизоморфным группам соответствуют разные наборы чисел

$$\big(n; (n_{2,1}, \ldots, n_{2,k_2}); \ldots; (n_{p,1}, \ldots, n_{p,k_p}); \ldots\big).$$

Поэтому множество всевозможных конечных (т.е. таких, что $k_p = 0$ при больших p) наборов указанного вида — полная система инвариантов изоморфизма в $\mathscr{A}b_{fg}$.

Что касается категории $\mathscr{N}orm$ (и тем более $\mathscr{N}orm_1$), то они слишком велики для того, чтобы для их объектов можно было придумать полную классификацию. Тем не менее, для полной подкатегории в $\mathscr{N}orm_1$, состоящей из гильбертовых пространств (о них речь пойдет позже) такая классификация имеется.

Классификация морфизмов. Функциональный анализ — типичный пример науки, в которой морфизмы (линейные операторы), по-видимому, даже важнее, чем объекты (пространства, в которых эти операторы действуют). Часто бывает так, что вначале выписывается некая формула, задающая линейный оператор (дифференциальный, интегральный, псевдодифференциальный …), а уже потом под этот оператор специальным образом строится (или подбирается) пространство, в котором он действует. Как правило, для данного оператора существует целое семейство таких «подходящих» пространств. Так возникли, например, знаменитые пространства Соболева, а впоследствии и многие другие функциональные пространства.

Поэтому классифицировать операторы — задача ничуть не менее важная, чем классифицировать пространства. Что следует понимать под классификацией операторов (или морфизмов в какой-либо категории)? Одна из наиболее важных задач такого рода — классификация эндоморфизмов с точностью до подобия.

Определение 1. Пусть $\mathscr{C}$ — категория. Эндоморфизмы $\varphi\colon X \to X$ и $\psi\colon Y \to Y$ в $\mathscr{C}$ называются *подобными*, если существует изоморфизм $u\colon X \to Y$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "u"'] & X \arrow[d, "u"] \\ Y \arrow[r, "\psi"] & Y \end{tikzcd} \tag{1}$$

коммутативна (т.е. $\psi = u\varphi u^{-1}$).

На самом деле, отношение подобия — это отношение изоморфизма в подходящей категории. А именно, обозначим через $\mathscr{E}nd(\mathscr{C})$ категорию, объекты которой — это пары (X, φ), где $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ и $\varphi \in \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X, X)$, а морфизм из (X, φ) в (Y, ψ) — это такой морфизм $u\colon X \to Y$ в $\mathscr{C}$, что диаграмма (1) коммутативна. Легко видеть, что эндоморфизмы φ и ψ подобны тогда и только тогда, когда они изоморфны как объекты категории $\mathscr{E}nd(\mathscr{C})$.

Упражнение 6. Придумайте полную систему инвариантов подобия эндоморфизмов в категории $\mathscr{FL}in$.
Указание. Вспомните теорему о жордановой нормальной форме.

Иногда бывает удобно наложить на изоморфизм u из диаграммы (1) некоторые дополнительные условия:

Определение 2. Пусть $\mathscr{D}$ — подкатегория в $\mathscr{C}$, и пусть $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$. Эндоморфизмы $\varphi\colon X \to X$ и $\psi\colon Y \to Y$ в категории $\mathscr{C}$ называются *подобными относительно* $\mathscr{D}$, если существует изоморфизм $u\colon X \to Y$ в категории $\mathscr{D}$ такой, что диаграмма (1) коммутативна.

Разумеется, относительное подобие — это тоже изоморфизм в некоторой категории $\mathscr{E}nd_{\mathscr{D}}(\mathscr{C})$ (дайте определение этой категории).

Упражнение 7. Пусть $\mathscr{C}$ — полная подкатегория в $\mathscr{N}orm$, состоящая из конечномерных евклидовых пространств (т.е. тех пространств, норма в которых порождается скалярным произведением), и пусть $\mathscr{D}$ — подкатегория в $\mathscr{C}$, объекты которой — те же,

что в $\mathscr{C}$, а морфизмы — те же, что в $\mathscr{N}orm_1$. Придумайте полную систему инвариантов подобия для самосопряженных эндоморфизмов в $\mathscr{C}$ относительно $\mathscr{D}$.
Указание. Эрмитова матрица диагонализируется в подходящем ортонормированном базисе.

Результат последнего упражнения — частный случай знаменитой спектральной теоремы Гильберта, которая классифицирует самосопряженные эрмитовы операторы в гильбертовом пространстве с точностью до унитарной эквивалентности. Эта теорема считается одной из вершин функционального анализа. Вскоре мы докажем эту теорему для частного случая компактных операторов.

Замечание 7. Линейные операторы, рассмотренные на первой половине лекции — не только «классические», но и «модельные» (с точки зрения различных задач о классификации), или же являются «кирпичиками» для построения модельных (примерно в том же смысле, в котором жорданова клетка — «кирпичик» для модельного оператора в конечномерном пространстве).

Функторы.

В разных областях математики часто возникает понятие «индуцированного отображения». Это происходит в тех ситуациях, когда некоторая общая конструкция определена не только на объектах, но и на морфизмах между ними. Формальное определение таково.

Определение 3. Пусть $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ — категории. Говорят, что задан *ковариантный функтор* $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, если:

1) Каждому объекту $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ сопоставлен объект $F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$;
2) Для каждых $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ задано отображение $F\colon \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X,Y) \to \mathbf{h}_{\mathscr{D}}(F(X), F(Y))$, такое, что
   (i) $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$ для любых $\psi\colon X \to Y$ и $\varphi\colon Y \to Z$;
   (ii) $F(\mathbf{1}_X) = \mathbf{1}_{F(X)}$ для любого X.

Иногда бывает так, что «индуцированное отображение» $F(\varphi)$ смотрит в противоположном направлении:

Определение 4. *Контравариантный функтор* из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{D}$ — это ковариантный функтор из дуальной категории $\mathscr{C}^\circ$ в $\mathscr{D}$.

Чтобы получить прямое определение, нужно в п. 2) из определения ковариантного функтора заменить фигурирующее там отображение на отображение $\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X,Y) \to \mathbf{h}_{\mathscr{D}}(F(Y), F(X))$, а условие (i) заменить на $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$.

Пример 4. Простейший пример — тождественный функтор $\mathbf{1}_{\mathscr{C}}\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$.

Пример 5. Функтор $\mathscr{L}in \xrightarrow{*} \mathscr{L}in$ сопоставляет каждому линейному пространству X его сопряженное X^*, состоящее из линейных функционалов на X, а каждому оператору $T\colon X \to Y$ — сопряженный оператор $T^*\colon Y^* \to X^*$, заданный формулой $T^*(f) = f \circ T$. Отметим, что этот функтор контравариантен.

Пример 6. Пусть $\mathscr{C}$ — какая-либо категория «множеств с дополнительной структурой» (например, $\mathscr{L}in$, $\mathscr{T}op$, $\mathscr{G}r$, $\mathscr{N}orm$ ...). *Забывающий функтор* $\square\colon \mathscr{C} \to \mathscr{S}et$ сопоставляет каждому объекту из $\mathscr{C}$ его же, но уже как множество, а каждому морфизму — его же, но уже как просто отображение. Можно также рассматривать «частично забывающие» функторы — например, из $\mathscr{M}etr$ в $\mathscr{T}op$, из $\mathscr{A}lg$ в $\mathscr{L}in$ и т.п. (Польза от этого понятия выяснится потом, когда мы будем говорить о свободных объектах и сопряженных функторах).

Пример 7. Пусть X — топологическое пространство, $\operatorname{Open}(X)$ — категория его открытых подмножеств (см. лекцию 1). Контравариантный функтор $\operatorname{Open}(X) \to \mathscr{C}$ называется *предпучком* в $\mathscr{C}$ (дайте прямое определение, не опирающееся на понятие функтора).

Например, если X — гладкое многообразие, то сопоставление $U \mapsto C^\infty(U)$ задает предпучок со значениями в категории алгебр.

Пример 8. Пусть $({}_*\mathscr{T}op)_h$ — категория, объекты которой — топологические пространства с отмеченной точкой, а морфизмы из (X, x_0) в (Y, y_0) — гомотопические классы непрерывных отображений из X в Y, переводящих x_0 в y_0 (при этом гомотопия рассматривается в классе именно таких отображений). Сопоставление каждому пространству (X, x_0) его фундаментальной группы $\pi_1(X, x_0)$ является ковариантным функтором из $({}_*\mathscr{T}op)_h$ в $\mathscr{G}r$.

Пример 9. Пусть $\mathbf{C}^\bullet(\mathscr{L}in)$ — категория коцепных комплексов линейных пространств. Для каждого $n \in \mathbb{Z}$ группой *n-мерных когомологий* комплекса

$$\cdots \to X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \to \cdots$$

называется факторпространство $H^n(X) = \operatorname{Ker} d^n / \operatorname{Im} d^{n-1}$ (корректно определенное ввиду соотношения $d^n d^{n-1} = 0$). Легко видеть, что каждый морфизм комплексов $f\colon X \to Y$ переводит пространство коциклов (т.е. ядро d^n) в пространство коциклов, а пространство кограниц (т.е. образ d^{n-1}) — в пространство кограниц, и поэтому определяет отображение $H^n(X) \to H^n(Y)$. Тем самым $H^n : \mathbf{C}^\bullet(\mathscr{L}in) \to \mathscr{L}in$ — ковариантный функтор.

Пример 10. Функтор (контравариантный) $\Omega\colon \mathscr{D}iff \to \mathbf{C}^\bullet(\mathscr{L}in)$ сопоставляет каждому гладкому многообразию M его комплекс де Рама (комплекс внешних форм) $(\Omega(M), d)$, а каждому гладкому отображению $f\colon M \to N$ — морфизм комплексов $f^*\colon \Omega(N) \to \Omega(M)$, который переводит p-форму $\omega \in \Omega^p(N)$ в ее прообраз $f^*(\omega)$. Композиция этого функтора с предыдущим дает контравариантный функтор $H^n : \mathscr{D}iff \to \mathscr{L}in$ n-мерных когомологий де Рама.

Где об этом почитать. Разнообразные «классические» примеры линейных операторов в нормированных пространствах можно найти в трехтомнике Данфорда и Шварца «Линейные операторы» и во многих учебниках по функциональному анализу — например, в книге Люстерника и Соболева «Элементы функционального анализа». По поводу функторов см. литературные указания из лекции 1.