Лекция 4.
Еще немного о функторах.

Функторы полезны, в частности, по той причине, что они часто позволяют сводить задачи из одной области математики к задачам из другой области. Важный класс таких задач — задачи о ретракции и о коретракции.

Определение 1. Морфизм $\varphi\colon X \to Y$ в категории $\mathscr{C}$ называется *ретракцией* (соответственно, *коретракцией*), если существует морфизм $\psi\colon Y \to X$ такой, что $\varphi\psi = \mathbf{1}_Y$ (соответственно, $\psi\varphi = \mathbf{1}_X$).

Легко видеть, что морфизм является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он является одновременно ретракцией и коретракцией. Заметим также, что коретракция в $\mathscr{C}$ — это то же самое, что ретракция в $\mathscr{C}^\circ$, и наоборот. Поэтому при изучении действия функторов на ретракции и коретракции мы можем ограничиться ковариантными функторами.

Предложение 1. *Пусть $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ — ковариантный функтор. Тогда, если φ — ретракция (соответственно, коретракция) в $\mathscr{C}$, то $F(\varphi)$ — ретракция (соответственно, коретракция) в $\mathscr{D}$.*

Пример 1. То, что окружность S^1 не является ретрактом круга D^2 (т.е. что не существует непрерывного отображения круга на свою границу, которое оставляло бы точки границы на месте), обычно доказывают так: применим к вложению $S^1 \hookrightarrow D^2$ функтор фундаментальной группы π_1; тогда, если бы это вложение было коретракцией, то группа $\mathbb{Z}$ была бы ретрактом (т.е. прямым слагаемым) нулевой группы, что не так.

Разумеется, утверждение, обратное к предложению 1, в общем случае неверно. (Что вполне объяснимо: если мы хотим, чтобы объекты, получаемые после применения функтора F, были устроены проще, чем исходные, то естественно ожидать, что при этом мы потеряем часть информации об исходных объектах и морфизмах.) Функторы, не приводящие к такой «потере информации», носят специальное название.

Определение 2. Ковариантный функтор $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ называется *строгим*[1] (соответственно, *полным*), если для каждых $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ отображение $F\colon \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X,Y) \to \mathbf{h}_{\mathscr{D}}(F(X),F(Y))$ инъективно (соответственно, сюръективно).

Пример 2. Если $\mathscr{C}$ — подкатегория в $\mathscr{D}$, то функтор вложения $\mathscr{C}$ в $\mathscr{D}$ — строгий. Подкатегория является полной тогда и только тогда, когда функтор вложения — полный. (Отметим на будущее, что этим примером, в сущности, исчерпываются все функторы, являющиеся одновременно строгими и полными.)

При составлении конспекта существенно использованы неопубликованные записки лекций А. Я. Хелемского «Лекции и упражнения по функциональному анализу» (с согласия автора).

[1]Или *верным* (что является более точным переводом английского термина “faithful”).

Предложение 2. *Пусть $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ — ковариантный функтор. Предположим, что он строгий и полный. Тогда φ — ретракция (соответственно, коретракция) в $\mathscr{C}$ $\iff$ $F(\varphi)$ — ретракция (соответственно, коретракция) в $\mathscr{D}$.*

Упражнение 1. Рассмотрим функтор сопряжения $\mathscr{L}in \xrightarrow{*} \mathscr{L}in$ (см. прошлую лекцию). Является ли он строгим? А полным?

Пример 3. Пусть $\mathscr{C}\mathscr{T}op$ — категория компактных хаусдорфовых топологических пространств, а $\mathscr{N}orm\mathscr{A}lg_u$ — категория нормированных алгебр с единицей (морфизмы в которой — непрерывные гомоморфизмы алгебр, переводящие единицу в единицу). Контравариантный функтор $C\colon \mathscr{C}\mathscr{T}op \to \mathscr{N}orm\mathscr{A}lg_u$ сопоставляет пространству X алгебру $C(X)$ непрерывных функций, а непрерывному отображению $f\colon X \to Y$ — гомоморфизм $C(f)\colon C(Y) \to C(X)$, определенный формулой $C(f)(\varphi) = \varphi \circ f$.

Упражнение 2. 1) Докажите, что функтор $C(f)$ — строгий.

2)* Докажите, что функтор $C(f)$ — полный.

Указание. Вначале покажите, что все непрерывные гомоморфизмы $C(X) \to \mathbb{C}$ имеют вид $\varphi \mapsto \varphi(x)$ для некоторого $x \in X$. Иными словами, $X = \mathbf{h}_{\mathscr{N}orm\mathscr{A}lg_u}(C(X), \mathbb{C})$. Теперь, чтобы для заданного гомоморфизма $F\colon C(Y) \to C(X)$ найти отображение $f\colon X \to Y$, такое, что $F = C(f)$, остается применить к F функтор $\mathbf{h}_{\mathscr{N}orm\mathscr{A}lg_u}(\,\cdot\,, \mathbb{C})$ (его определение см. ниже).

Замечание 1. Последнее упражнение означает, что говорить о компактах и их непрерывных отображениях — это все равно, что говорить об алгебрах вида $C(X)$ и их непрерывных гомоморфизмах. Иными словами, $\mathscr{C}\mathscr{T}op$ «можно считать»[1] полной подкатегорией в $\mathscr{N}orm\mathscr{A}lg_u$. В свое время это наблюдение послужило основанием для появления новой науки — *некоммутативной геометрии*. Оказалось, что многие понятия, конструкции, теоремы и т.п., имеющие смысл в категории $\mathscr{C}\mathscr{T}op$, можно расширить на некоторую бóльшую подкатегорию в $\mathscr{N}orm\mathscr{A}lg_u$, состоящую из C^*-*алгебр* (их определение будет дано немного позже).

Функторы морфизмов.

Пусть $\mathscr{C}$ — категория. С каждым объектом $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ можно связать два функтора из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{S}et$, играющие очень важную роль во многих вопросах.

1. Ковариантный функтор $\mathbf{h}^X : \mathscr{C} \to \mathscr{S}et$ действует так:

- $\mathbf{h}^X(Y) = \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ для любого $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$;
- Если $\varphi\colon Y_1 \to Y_2$ — морфизм в $\mathscr{C}$, то отображение $\mathbf{h}^X(\varphi)\colon \mathbf{h}^X(Y_1) \to \mathbf{h}^X(Y_2)$ задается формулой $f \mapsto \varphi \circ f$.

2. Контравариантный функтор $\mathbf{h}_X : \mathscr{C} \to \mathscr{S}et$ действует так:

- $\mathbf{h}_X(Y) = \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(Y, X)$ для любого $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$;

[1] Что значит «можно считать», станет ясно, когда мы доберемся до понятия эквивалентности категорий.

- Если $\varphi\colon Y_1 \to Y_2$ — морфизм в $\mathscr{C}$, то отображение $\mathbf{h}_X(\varphi)\colon \mathbf{h}_X(Y_2) \to \mathbf{h}_X(Y_1)$ задается формулой $f \mapsto f \circ \varphi$.

Иногда используют более развернутые обозначения и пишут $\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X, \cdot\,)$ вместо $\mathbf{h}^X$ и $\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(\,\cdot\,, X)$ вместо $\mathbf{h}_X$.

Пример 4. При $\mathscr{C} = \mathscr{L}in$ и $X = \mathbb{C}$ мы получаем уже знакомый нам функтор сопряжения $\mathbf{h}_{\mathbb{C}} = {}^*$. (Кстати, что такое в данном случае $\mathbf{h}^{\mathbb{C}}$?)

Пример 5. Пусть $\mathscr{C} = ({}_*\mathscr{T}op)_h$ (см. прошлую лекцию) и $X = (S^1, s_0)$ (окружность с отмеченной точкой). Тогда функтор $\mathbf{h}^X$ — это в точности функтор фундаментальной группы π_1.

Пример 6. Пусть $\mathscr{C} = \mathscr{T}op$ и пусть $X = \mathbb{C}$. Тогда функтор C из примера 3 — это ограничение на $\mathscr{C}\mathscr{T}op$ функтора $\mathbf{h}_X$.

Замечание 2. Из этих примеров мы видим, что функтор $\mathbf{h}_X$ или $\mathbf{h}^X$ часто принимает значения не в $\mathcal{S}et$, а в какой-либо категории «множеств с дополнительной структурой». Иногда это происходит из-за наличия дополнительной структуры у объекта X. Например, в примере 6 функтор $\mathbf{h}_X$ принимает значения в $\mathscr{A}lg$ из-за того, что $\mathbb{C}$ — не просто топологическое пространство, а топологическая алгебра. Что касается примера 5, то фундаментальная группа $\pi_1(Y, y_0) = \mathbf{h}^X(Y, y_0)$ является группой из-за того, что $X = (S^1, s_0)$ — *когруппа* в $({}_*\mathscr{T}op)_h$.

Пространство, сопряженное к нормированному пространству.

Возьмем теперь категорию $\mathscr{N}orm$ нормированных пространств и рассмотрим функтор $\mathbf{h}_{\mathbb{C}} = \mathbf{h}_{\mathscr{N}orm}(\,\cdot\,, \mathbb{C}) = \mathscr{B}(\,\cdot\,, \mathbb{C})$ (ср. пример 4).

Определение 3. Пусть X — нормированное пространство. Пространство $X^* = \mathscr{B}(X, \mathbb{C})$ называется *сопряженным* к X.

Таким образом, элементы X^* — это ограниченные (=непрерывные) линейные функционалы на X. Отметим, что X^* — не просто множество, а линейное нормированное пространство.

Упражнение 3. Линейный функционал f на нормированном пространстве ограничен $\iff$ его ядро замкнуто.

Поскольку $\mathbf{h}_{\mathbb{C}}$ — контравариантный функтор, каждому $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ он сопоставляет отображение $T^*\colon Y^* \to X^*$.

Определение 4. Если $T\colon X \to Y$ — ограниченный линейный оператор, то его *сопряженный оператор* $T^*\colon Y^* \to X^*$ задается формулой $T^*(f) = f \circ T$.

Замечание 3. Если $x \in X$ и $f \in X^*$, то вместо $f(x)$ часто пишут $\langle f, x\rangle$ или $\langle x, f\rangle$. Поэтому T^* однозначно задается формулой $\langle T^* f, x\rangle = \langle f, Tx\rangle$ (или $\langle x, T^* f\rangle = \langle Tx, f\rangle$).

Предложение 3. *Для каждого $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ его сопряженный оператор T^* принадлежит $\mathscr{B}(Y^*, X^*)$, причем $\|T^*\| \leqslant \|T\|$.*

Доказательство. Линейность T^* очевидна. Кроме того, $\|T^*(f)\| = \|f \circ T\| \leqslant \|f\|\|T\|$ для любого $f \in Y^*$, поэтому $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. □

Последнее предложение позволяет рассматривать функтор сопряжения как функтор из $\mathscr{N}orm$ в $\mathscr{N}orm$ или из $\mathscr{N}orm_1$ в $\mathscr{N}orm_1$.

Посмотрим теперь, как функтор сопряжения действует на пространства последовательностей и на операторы в них.

Предложение 4. *Пусть* $1 < p < +\infty$ *и пусть* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Тогда отображение*

$$F\colon \ell^q \to (\ell^p)^*, \qquad y \mapsto F_y, \qquad F_y(x) = \sum_i x_i y_i$$

является изоморфизмом в $\mathscr{N}orm_1$.

Доказательство. Из неравенства Гельдера следует, что для любого $y \in \ell^q$ отображение F_y — ограниченный линейный функционал на ℓ^p, причем $\|F_y\| \leqslant \|y\|_q$. Поэтому отображение F корректно определено, линейно, непрерывно, и $\|F\| \leqslant 1$. Осталось проверить его сюръективность и изометричность.

Пусть $f \in (\ell^p)^*$. Мы должны подобрать $y \in \ell^q$ так, чтобы $f = F_y$. Для этого положим $y_j = f(e_j)$ для каждого $j \in \mathbb{N}$ (никакая другая последовательность на роль y, понятно, не подойдет). Чтобы показать, что $y \in \ell^q$, представим $|y_j|^q$ в виде $|y_j|^q = |y_j|^{q-1} e^{i\varphi_j} y_j$ и положим $x_j = |y_j|^{q-1} e^{i\varphi_j}$. Фиксируем произвольное $N \in \mathbb{N}$ и рассмотрим вектор $x^{(N)} = \sum_{j=1}^N x_j e_j \in \ell^p$. Тогда

$$\sum_{j=1}^N |y_j|^q = \sum_{j=1}^N x_j y_j = f(x^{(N)}) \leqslant \|f\|\|x^{(N)}\|_p \tag{1}$$

С другой стороны,

$$\|x^{(N)}\|_p = \Bigl(\sum_{j=1}^N |y_j|^{p(q-1)}\Bigr)^{1/p} = \Bigl(\sum_{j=1}^N |y_j|^q\Bigr)^{1/p}$$

Подставляя в (1), после сокращения видим, что $(\sum_{j=1}^N |y_j|^q)^{1/q} \leqslant \|f\|$ для любого $N \in \mathbb{N}$. При $N \to \infty$ получаем, что $y \in \ell^q$ и $\|y\|_q \leqslant \|f\|$. Поскольку линейная оболочка e_j-ых плотна в ℓ^p, а f и F_y линейны и непрерывны, равенство $f(e_j) = F_y(e_j) = y_j$ влечет за собой $f = F_y$. Следовательно, F — сюръекция. Кроме того, $\|y\|_q \leqslant \|f\| = \|F_y\| \leqslant \|y\|_q$ (см. выше), так что F — изометрия. □

Упражнение 4. Докажите, что $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$ и $(c_0)^* \cong \ell^1$ в $\mathscr{N}orm_1$.

Упражнение 5. Если Вы сделали предыдущее упражнение, ответьте на вопрос: почему нельзя тем же способом доказать, что $(\ell^\infty)^* \cong \ell^1$? (На самом деле, $(\ell^\infty)^*$ и вправду неизоморфно ℓ^1; мы убедимся в этом на следующей лекции).

Теперь разберемся, как действуют операторы, сопряженные к диагональным операторам и к сдвигам.

Упражнение 6. Фиксируем $p \in [1, +\infty)$. Пусть $\lambda \in \ell^\infty$ и пусть $T_\lambda^{(p)} \colon \ell^p \to \ell^p$ — диагональный оператор (см. прошлую лекцию). Отождествим $(\ell^p)^*$ с ℓ^q при помощи изоморфизма F, указанного в предложении 4 (для $p = 1$ мы полагаем $q = \infty$; см. упражнение 4). Тогда сопряженному оператору $(T_\lambda^{(p)})^*$ при этом изоморфизме будет соответствовать диагональный оператор $T_\lambda^{(q)} \colon \ell^q \to \ell^q$. Иными словами, диаграмма

$$\begin{tikzcd} \ell^q \arrow[r, "T_\lambda^{(q)}"] \arrow[d, "F"'] & \ell^q \arrow[d, "F"] \\ (\ell^p)^* \arrow[r, "(T_\lambda^{(p)})^*"] & (\ell^p)^* \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Упражнение 7. Оператор, сопряженный к левому (соответственно, правому) сдвигу в ℓ^p — это правый (соответственно, левый) сдвиг в ℓ^q.

Замечание 4. Обратите внимание, что для операторов T из последних двух упражнений выполнено равенство $\|T^*\| = \|T\|$. В следующий раз мы убедимся в том, что это равенство верно всегда.

Где об этом почитать. Об использовании функторов для сведения одних задач к другим можно прочесть в лекции 0 книги Постникова «Основы теории гомотопий». Пример 3 и упражнение 2 — это важная составная часть *первой теоремы Гельфанда-Наймарка*; об этом см. книгу Хелемского «Банаховы и полинормированные алгебры» и Мерфи «C^*-алгебры и теория операторов». Некоммутативной геометрии в ее различных вариантах посвящена книга Конна (A. Connes, “Noncommutative geometry”); кое-что из этой области есть в вышеупомянутой книге Мерфи. О функторах морфизмов и о том, какая от них польза, подробно написано у Шафаревича («Основные понятия алгебры»), Манина («Лекции по алгебраической геометрии, часть I», добавление), Гельфанда и Манина («Методы гомологической алгебры»). Примеры вычисления сопряженных нормированных пространств и сопряженных операторов есть практически в любом учебнике функционального анализа — например, у Колмогорова и Фомина («Элементы теории функций и функционального анализа»), Люстерника и Соболева («Элементы функционального анализа»). Кстати, очень хорошая книжка, которая будет полезна на протяжении всего курса — Рид и Саймон, «Методы современной математической физики», т. 1 (функциональный анализ).