Лекция 6.
Банаховы пространства.

Напомним, что последовательность $\{x_n\}$ в метрическом пространстве (X, ρ) называется *фундаментальной*, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $n, m > N$. Каждая сходящаяся последовательность фундаментальна. Пространства, в которых верно и обратное, называются *полными*.

Определение 1. Нормированное пространство X называется *банаховым*, если оно полно относительно метрики $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Вы, конечно, знаете, что $\mathbb{R}$ полно (критерий Коши), и что конечномерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ (а, значит, и $\mathbb{C}^n$) полно. Причем не обязательно в евклидовой норме:

Упражнение 1. Если $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ — эквивалентные нормы на векторном пространстве X, то X полно в $\|\cdot\| \iff X$ полно в $\|\cdot\|'$.

Замечание 1. Таким образом, полнота — это инвариант изоморфизма в категории $\mathscr{N}orm$. Но не в $\mathscr{M}etr$! (придумайте соответствующий пример). **!**

Следствие 1. *Конечномерное пространство является банаховым по отношению к любой норме.*

Упражнение 2. Если ряд $\sum_n x_n$ в банаховом пространстве сходится абсолютно (т.е. если сходится ряд $\sum_n \|x_n\|$), то он сходится (как и в $\mathbb{R}$).

Замечание 2. Все же аналогии с конечномерным случаем простираются не так далеко: известно, что в каждом бесконечномерном банаховом пространстве существуют ряды, которые сходятся безусловно, но не абсолютно (теорема Дворецкого-Роджерса).

Предложение 1. *Пусть X — метрическое пространство и пусть $Y \subset X$.*
1) Если Y полно, то оно замкнуто.
2) Если X полно, а Y замкнуто, то Y полно.

Следствие 2. *Конечномерное линейное подпространство нормированного пространства замкнуто.*

Теперь мы можем выполнить данное на лекции 3 обещание и доказать, что единичный шар в бесконечномерном нормированном пространстве некомпактен. Для этого введем еще одно полезное понятие. Вначале напомним, что *расстоянием* от точки x до множества A в метрическом пространстве X называется величина $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, a)\,;\, a \in A\}$.

Определение 2. Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subsetneq X$ — собственное линейное подпространство. Фиксируем $\varepsilon \geqslant 0$. Вектор $h \in X$ называется *ε-перпендикуляром* к X_0, если $\|h\| = 1$ и $\rho(h, X_0) \geqslant 1 - \varepsilon$.

При составлении конспекта существенно использованы неопубликованные записки лекций А. Я. Хелемского «Лекции и упражнения по функциональному анализу» (с согласия автора).

Сразу заметим, что из условия $\|h\| = 1$ следует, что $\rho(h, X_0) \leqslant 1$. Если $X = \mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ с евклидовой нормой, то для любого вектора h длины 1, перпендикулярного X_0, выполнено равенство $\rho(h, X_0) = 1$ (т.е. h является 0-перпендикуляром). Однако в общем случае такого h может и не оказаться:

Упражнение 3. Пусть $f \in X^*$ — ненулевой функционал и $X_0 = \operatorname{Ker} f$. Тогда для существования 0-перпендикуляра к X_0 необходимо и достаточно, чтобы f достигал нормы (см. лекцию 3).

Упражнение 4. Приведите пример нормированного пространства X и функционала $f \in X^*$, не достигающего нормы. (Тем самым Вы построите пример замкнутого подпространства, к которому не существует 0-перпендикуляра).
Указание. X должно быть нерефлексивным (почему — выяснится потом).

Предложение 2. *Пусть X_0 — собственное замкнутое линейное подпространство нормированного пространства X. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-перпендикуляр к X_0.*

Доказательство. Возьмем $y \in X \setminus X_0$. Тогда $d = \rho(y, X_0) > 0$, поскольку X_0 замкнуто. Для каждого $\delta > 0$ подберем $x_\delta \in X_0$ так, чтобы $\|y - x_\delta\| \leqslant d + \delta$, и положим $h_\delta = \frac{y - x_\delta}{\|y - x_\delta\|}$. Тогда $\|h_\delta\| = 1$, и для любого $x \in X_0$ имеем:

$$\|h_\delta - x\| = \frac{1}{\|y - x_\delta\|} \|y - (x_\delta + \|y - x_\delta\| x)\| \geqslant \frac{d}{d + \delta},$$

что больше $1 - \varepsilon$ при достаточно малом δ. Значит, h_δ — ε-перпендикуляр к X_0. □

Следствие 3. *Единичный шар в бесконечномерном нормированном пространстве некомпактен.*

Доказательство. Поскольку X бесконечномерно, в нем существует цепочка подпространств $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ такая, что $\dim X_n = n$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдем $h_n \in X_{n+1}$, являющийся 1/2-перпендикуляром к X_n. Тогда из последовательности $\{h_n\}$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. □

Следующая теорема (принцип вложенных шаров) Вам, вероятно, известна, поэтому мы ее доказывать не будем.

Теорема 1. *Пусть X — метрическое пространство. Следующие условия эквивалентны:*
1) X полно;
2) Для любой убывающей последовательности замкнутых шаров $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ в X, радиусы которых стремятся к нулю, пересечение $\cap_n B_n$ непусто.

Вы, наверное, помните, что требование стремления радиусов шаров к нулю отбросить в общем случае нельзя. А в нормированных пространствах — можно:

Упражнение 5. Если X — банахово пространство, то в нем любая убывающая последовательность замкнутых шаров имеет непустое пересечение.

Напомним, что подмножество топологического пространства называется *нигде не плотным*, если его замыкание имеет пустую внутренность (т.е. не содержит открытых множеств). Вот еще одно важное свойство полных пространств:

Теорема 2 (теорема Бэра). *Полное метрическое пространство не может быть представлено в виде объединения счетного числа своих нигде не плотных подмножеств.*

Упражнение 6. Линейное подпространство нормированного пространства либо нигде не плотно, либо всюду плотно.

Упражнение 7. Размерность бесконечномерного банахова пространства несчетна.

Посмотрим теперь, какие из «классических» пространств (см. лекцию 2) полны, а какие — нет.

Упражнение 8. Докажите полноту пространств $\ell^\infty(S)$ (S — любое множество), $C_b(X)$, $C_0(X)$ (X — топологическое пространство), ℓ^p (для любого $1 \leqslant p \leqslant \infty$), $C^n[a,b]$.

Упражнение 9. Докажите, что следующие пространства неполны: $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ при $p < \infty$; ℓ^p с нормой, индуцированной из ℓ^q при $q > p$; $C^n[a,b]$ (для $n \geqslant 1$) с нормой из $C^m[a,b]$ при $m < n$ (в частности, с sup-нормой).

Теорема 3. *Пусть X, Y — нормированные пространства. Пространство $\mathscr{B}(X,Y)$ полно $\iff$ Y полно.*

Доказательство. ($\Rightarrow$): упражнение.
($\Leftarrow$). Пусть $\{T_n\}$ — фундаментальная последовательность в $\mathscr{B}(X,Y)$. Тогда $\{T_n(x)\}$ — фундаментальная последовательность в Y для любого $x \in X$, поэтому она сходится. Положим $T(x) = \lim_n T_n(x)$. Получаем (очевидно, линейный) оператор $T\colon X \to Y$. Покажем, что T ограничен и $T_n \to T$ по норме. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем $N \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ при $n, m > N$. Тогда $\|T_n(x) - T_m(x)\| < \varepsilon$ для любого x из единичного шара. Фиксируем $n > N$; тогда при $m \to \infty$ получим $\|T_n(x) - T(x)\| \leqslant \varepsilon$ — опять-таки для любого x из единичного шара. Отсюда следует, во-первых, что $T_n - T \in \mathscr{B}(X,Y)$, так что $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, а во-вторых — что $\|T_n - T\| \leqslant \varepsilon$ при $n > N$. Значит, $T_n \to T$ по норме, и все доказано. □

Следствие 4. *Для любого нормированного пространства X его сопряженное X^* полно.*

Следствие 5. *Рефлексивное нормированное пространство полно.*

Замечание 3. Теперь понятно, почему примеры нерефлексивных пространств из упражнения 16 прошлой лекции — «неинтересные»: они неполны. Самые простые примеры нерефлексивных банаховых пространств — это, например, c_0, ℓ^1 и $C[a,b]$ (см. упражнение 12 прошлой лекции).

Упражнение 10. Докажите, что банахово пространство X рефлексивно $\iff$ X^* рефлексивно.
Указание. Для доказательства импликации $\Leftarrow$ можно воспользоваться результатом упражнения 14 прошлой лекции.

Обозначим через $\mathscr{B}an$ (соответственно, $\mathscr{B}an_1$) полную подкатегорию в $\mathscr{N}orm$ (соответственно, в $\mathscr{N}orm_1$), состоящую из банаховых пространств.

Посмотрим теперь на некоторые общие конструкции, которые можно выполнять над объектами наших (теперь уже четырех) категорий.

Произведения и копроизведения.

Пусть X_1 и X_2 — нормированные пространства, и пусть $p \in [1, +\infty]$. Введем на прямой сумме $X_1 \oplus X_2$ норму, полагая

$$\|(x_1, x_2)\|_p = \begin{cases} (\|x_1\|^p + \|x_2\|^p)^{\frac{1}{p}} & \text{при } p < \infty \\ \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\} & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Упражнение 11. 1) Убедитесь, что это действительно норма.

2) Докажите, что $\|\cdot\|_p \sim \|\cdot\|_q$ для любых p, q.

Полученное нормированное пространство будем обозначать через $X_1 \oplus_p X_2$. Из последнего упражнения видно, что если мы работаем в категории $\mathscr{N}orm$, то индекс p у знака прямой суммы можно опустить.

Упражнение 12. Докажите, что $X_1 \oplus X_2$ полно $\iff$ X_1 и X_2 полны.

Упражнение 13. Пусть $1/p + 1/q = 1$ ($p, q \in [1, +\infty]$). Докажите, что $(X_1 \oplus_p X_2)^* \cong X_1^* \oplus_q X_2^*$ в $\mathscr{B}an_1$.

В категории $\mathscr{N}orm_1$ (или в $\mathscr{B}an_1$) пространства $X_1 \oplus_p X_2$ обычно неизоморфны друг другу при разных p (см. упражнение 12 из лекции 2). Более того, сейчас мы убедимся в том, что в этих двух категориях лишь одно из пространств $X_1 \oplus_p X_2$ имеет право называться «прямой суммой» X_1 и X_2 (а именно, $X_1 \oplus_1 X_2$), и лишь одно — их «прямым произведением» (а именно, $X_1 \oplus_\infty X_2$).

Обозначим через $i_1 \colon X_1 \to X_1 \oplus_p X_2$ вложение $x_1 \mapsto (x_1, 0)$, а через $p_1 \colon X_1 \oplus_p X_2 \to X_1$ — проекцию $(x_1, x_2) \mapsto x_1$. Аналогичным образом определим вложение $i_2 \colon X_2 \to X_1 \oplus_p X_2$ и проекцию $p_2 \colon X_1 \oplus_p X_2 \to X_2$. Заметим, что операторы i_1, i_2, p_1, p_2 имеют норму 1 (каково бы ни было $p \in [1, +\infty]$).

Упражнение 14. 1) Докажите, что для любого нормированного пространства Y и любых двух $T_k \in \mathscr{B}(X_k, Y)$ ($k = 1, 2$) существует единственный $T \in \mathscr{B}(X_1 \oplus_1 X_2, Y)$ такой, что $T \circ i_k = T_k$ ($k = 1, 2$). При этом $\|T\| = \max\{\|T_1\|, \|T_2\|\}$.

2) Докажите, что для любого нормированного пространства Y и любых двух $T_k \in \mathscr{B}(Y, X_k)$ ($k = 1, 2$) существует единственный $T \in \mathscr{B}(Y, X_1 \oplus_\infty X_2)$ такой, что $p_k \circ T = T_k$ ($k = 1, 2$). При этом $\|T\| = \max\{\|T_1\|, \|T_2\|\}$.

Пусть теперь $\mathscr{C}$ — произвольная категория и X_1, X_2 — ее объекты.

Определение 3. *Произведением* X_1 и X_2 называется тройка $(X_1 \times X_2, p_1, p_2)$, где $X_1 \times X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ и $p_k \in \mathbf{h}(X_1 \times X_2, X_k)$ ($k = 1, 2$), такая, что для любого $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ и любых двух $\varphi_k \in \mathbf{h}(Y, X_k)$ ($k = 1, 2$) существует единственный $\varphi \in \mathbf{h}(Y, X_1 \times X_2)$ такой, что $p_k \circ \varphi = \varphi_k$ ($k = 1, 2$):

$$\begin{tikzcd}
& X_1 \times X_2 \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X_1 & & X_2 \\
& Y \arrow[ul, "\varphi_1"] \arrow[ur, "\varphi_2"'] \arrow[uu, dashed, "\exists ! \varphi"] &
\end{tikzcd}$$

Определение 4. *Копроизведением* (реже — *суммой*) объектов X_1 и X_2 в $\mathscr{C}$ называется их произведение как объектов дуальной категории $\mathscr{C}^\circ$.

Упражнение 15. Обращая стрелки в определении 3, дайте развернутое определение копроизведения как тройки $(X_1 \sqcup X_2, i_1, i_2)$.

Конечно, может оказаться, что у заданных объектов X_1, X_2 не существует произведения (или копроизведения). Тем не менее,

Упражнение 16. Докажите, что произведение (а, значит, и копроизведение) двух объектов единственно с точностью до изоморфизма. Точнее, если (Π, p_1, p_2) и (Π', p_1', p_2') — произведения X_1 и X_2, то существует единственный изоморфизм $i\colon \Pi' \to \Pi$, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& \Pi \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X_1 & & X_2 \\
& \Pi' \arrow[ul, "p_1'"] \arrow[ur, "p_2'"'] \arrow[uu, dashed, "\exists!\, i"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативной.

Упражнение 17. 1) Опишите произведения и копроизведения в категориях $\mathscr{S}et$, $\mathscr{T}op$, $\mathscr{L}in$, $\mathscr{A}b$.

2)* Опишите произведения и копроизведения в категории $\mathscr{G}r$.

Упражнение 18. Используя упражнение 14, докажите, что

1) $(X_1 \oplus_\infty X_2, p_1, p_2)$ — произведение, а $(X_1 \oplus_1 X_2, i_1, i_2)$ — копроизведение в $\mathscr{N}orm_1$ и в $\mathscr{B}an_1$.

2) $(X_1 \oplus_p X_2, p_1, p_2)$ — произведение, а $(X_1 \oplus_p X_2, i_1, i_2)$ — копроизведение в $\mathscr{N}orm$ и в $\mathscr{B}an$ (каково бы ни было $p \in [1, +\infty]$).

Замечание 4. Итак, подведем итог: в категориях $\mathscr{N}orm$, $\mathscr{B}an$, $\mathscr{N}orm_1$ и $\mathscr{B}an_1$ любые два объекта обладают произведением и копроизведением. Кроме того, в $\mathscr{N}orm$ и в $\mathscr{B}an$ произведение и копроизведение оказываются изоморфными друг другу. Причина последнего явления в том, что морфизмы в $\mathscr{N}orm$ и $\mathscr{B}an$ можно складывать (говоря по-научному, эти категории *аддитивны*), чего не скажешь про $\mathscr{N}orm_1$ и $\mathscr{B}an_1$.

Определение произведения и утверждение о его единственности (упражнение 16) — это частные случаи общего и важного понятия *представимого функтора.* Поскольку мы еще не раз встретимся со сходными конструкциями, давайте обсудим это общее понятие.

Представимые функторы.

Пусть $\mathscr{C}$ — категория.

Определение 5. Ковариантный (соответственно, контравариантный) функтор $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{S}et$ называется *представимым*, если он изоморфен функтору $\mathbf{h}^X$ (соответственно, $\mathbf{h}_X$) для некоторого объекта $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. При этом X называется *представляющим объектом* для F.

Упражнение 19. Докажите, что если F представим, то представляющий объект определен однозначно с точностью до изоморфизма.
Указание. Воспользуйтесь биекциями

$$\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X_1, X_2) \cong \mathbf{h}_{\mathscr{F}unct(\mathscr{C}^\circ, \mathscr{S}et)}(\mathbf{h}_{X_1}, \mathbf{h}_{X_2}),$$
$$\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X_1, X_2) \cong \mathbf{h}_{\mathscr{F}unct(\mathscr{C}, \mathscr{S}et)}(\mathbf{h}^{X_2}, \mathbf{h}^{X_1})$$

(см. упражнение 9 с прошлой лекции).

Упражнение 20. Докажите, что забывающий функтор $\square\colon \mathscr{N}orm \to \mathscr{S}et$ представим.
Указание. См. пример 1 с прошлой лекции.

Пусть теперь X_1, X_2 — фиксированные объекты из $\mathscr{C}$. Рассмотрим контравариантный функтор $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{S}et$, определив его на объектах так:

$$F(Y) = \mathbf{h}(Y, X_1) \times \mathbf{h}(Y, X_2) \tag{1}$$

(доопределите его на морфизмах!)

Определение 6. Если функтор (1) представим, то представляющий объект называется *произведением* X_1 и X_2 и обозначается через $X_1 \times X_2$.

Таким образом, получаем естественный (по переменной Y) изоморфизм функторов

$$\mathbf{h}(Y, X_1 \times X_2) \cong \mathbf{h}(Y, X_1) \times \mathbf{h}(Y, X_2), \tag{2}$$

который однозначно определяет $X_1 \times X_2$ с точностью до изоморфизма.

Упражнение 21. Докажите эквивалентность последнего определения и определения 3.
Указание. Чтобы получить проекции p_1 и p_2, подставьте в (2) $X_1 \times X_2$ вместо Y.

Замечание 5. Утверждение о единственности произведения (упражнение 16) становится теперь частным случаем утверждения о единственности представляющего объекта (упражнение 19).

Обращая стрелки, получаем двойственное определение копроизведения $X_1 \sqcup X_2$ как объекта, представляющего функтор $Y \mapsto \mathbf{h}(X_1, Y) \times \mathbf{h}(X_2, Y)$. Копроизведение полностью характеризуется естественным изоморфизмом функторов

$$\mathbf{h}(X_1 \sqcup X_2, Y) \cong \mathbf{h}(X_1, Y) \times \mathbf{h}(X_2, Y). \tag{3}$$

А теперь вернемся к нормированным пространствам и посмотрим, во что превращаются изоморфизмы (2) и (3). Следующее упражнение — это, по сути, переформулировка упражнения 14.

Упражнение 22. Докажите, что для любых нормированных пространств X_1 и X_2 существуют изометрические изоморфизмы

$$\mathscr{B}(Y, X_1 \oplus_\infty X_2) \cong \mathscr{B}(Y, X_1) \oplus_\infty \mathscr{B}(Y, X_2),$$
$$\mathscr{B}(X_1 \oplus_1 X_2, Y) \cong \mathscr{B}(X_1, Y) \oplus_\infty \mathscr{B}(X_2, Y)$$

Более того, эти изоморфизмы являются естественными изоморфизмами функторов (от переменной Y), действующих из $\mathscr{N}orm_1$ в $\mathscr{N}orm_1$.

Где об этом почитать. Общие сведения о полных метрических пространствах см., например, у Колмогорова и Фомина («Элементы теории функций и функционального анализа»). Теорема Дворецкого-Роджерса доказана в книге Дэя «Нормированные линейные пространства». Представимые функторы, произведения и копроизведения подробно обсуждаются у Букура и Деляну («Введение в теорию категорий и функторов»).