Лекция 7.
Топологически инъективные и открытые операторы.

Сегодня мы обсудим два свойства линейных операторов, которые можно выразить как в топологических, так и в теоретико-категорных терминах. Одно из этих свойств отвечает нашему интуитивному представлению о слове «вложение», а другое — о слове «наложение».

Вначале введем следующие обозначения для открытых и замкнутых шаров в нормированном пространстве:

$$B_r^\circ = \{x \in X : \|x\| < r\}; \qquad B_r = \{x \in X : \|x\| \leqslant r\}.$$

Определение 1. Отображение топологических пространств $f\colon X \to Y$ называется
1) *топологически инъективным*, если $f\colon X \to f(X)$ — гомеоморфизм;
2) *открытым*, если оно переводит открытые множества в открытые.

Для линейных операторов между нормированными пространствами X и Y эти два понятия можно определить и по-другому.

Упражнение 1. Докажите, что следующие свойства линейного оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ эквивалентны:
1) T топологически инъективен;
2) Существует $c > 0$ такое, что $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$ для всех x.

Упражнение 2. Докажите, что если $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ открыт, то он сюръективен.

Упражнение 3. Докажите, что следующие свойства линейного оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ эквивалентны:
1) T открыт;
2) $T(B_1^\circ) \supset B_\varepsilon^\circ$ для некоторого $\varepsilon > 0$;
3) Существует $C > 0$ такое, что для любого $y \in Y$ найдется $x \in X$, удовлетворяющий условиям $Tx = y$ и $\|x\| \leqslant C\|y\|$.

Упражнение 4. Докажите, что если оператор $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ является коретракцией в категории $\mathscr{N}orm$, то он топологически инъективен, а если ретракцией — то открыт.

Обратное утверждение неверно из-за существования так называемых недополняемых подпространств.

Определение 2. Подпространство X_0 в нормированном пространстве X называется *дополняемым*, если оно удовлетворяет любому из следующих эквивалентных условий:
1) Тождественное вложение $X_0 \hookrightarrow X$ — коретракция в $\mathscr{N}orm$;
2) Существует $P \in \mathscr{B}(X)$ такой, что $P^2 = P$ и $P(X) = X_0$ (проектор X на X_0);
3) Существует подпространство $X_1 \subset X$ такое, что отображение $X_0 \oplus X_1 \to X$, действующее по правилу $(x_0, x_1) \mapsto x_0 + x_1$, является изоморфизмом в $\mathscr{N}orm$.

При составлении конспекта существенно использованы неопубликованные записки лекций А. Я. Хелемского «Лекции и упражнения по функциональному анализу» (с согласия автора).

Упражнение 5. 1) Убедитесь в эквивалентности этих условий.

2) Докажите, что любое конечномерное подпространство дополняемо.

3) Докажите, что дополняемое подпространство замкнуто.

4)* Докажите, что c_0 — недополняемое подпространство в ℓ^∞.

Выясним теперь, при каких условиях «классические» линейные операторы, обсуждавшиеся в лекции 3, топологически инъективны или же открыты.

Упражнение 6. Пусть T_λ — диагональный оператор в ℓ^p или в c_0. Докажите, что T_λ топологически инъективен $\iff$ он сюръективен $\iff$ он открыт $\iff$ он является изоморфизмом в $\mathscr{N}orm$ $\iff$ $\inf_n |\lambda_n| > 0$.

Замечание 1. Ясно, что диагональный оператор T_λ инъективен $\iff$ $\lambda_n \neq 0$ для любого n. Поэтому из результата предыдущего упражнения видно, что существуют инъективные, но не топологически инъективные операторы.

Упражнение 7. Пусть T_f — оператор умножения на функцию $f \in C[a,b]$, действующий в $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$. Докажите, что T_f топологически инъективен $\iff$ он сюръективен $\iff$ он открыт $\iff$ он является изоморфизмом в $\mathscr{N}orm$ $\iff$ f не обращается в нуль ни в одной точке.

Упражнение 8. При каких условиях T_f инъективен?

Упражнение 9. Докажите, что оператор левого сдвига T_ℓ, действующий в ℓ^p или в c_0, открыт, а оператор правого сдвига T_r топологически инъективен.

Вспомним, что левый сдвиг в ℓ^p и правый сдвиг в ℓ^q (где $1 < p, q < \infty$ и $1/p + 1/q = 1$) сопряжены друг другу (лекция 4), и что диагональный оператор T_λ, действующий в ℓ^p, сопряжен диагональному оператору T_λ, действующему в ℓ^q (см. там же). А теперь сопоставьте результаты упражнений 6 и 9 со следующим:

Упражнение 10. Если $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ топологически инъективен, то T^* открыт.

Перейдем теперь к категорному описанию топологически инъективных и открытых операторов.

Мономорфизмы и эпиморфизмы в категориях.

Пусть $\mathscr{C}$ — категория.

Определение 3. Морфизм $\varphi\colon X \to Y$ в $\mathscr{C}$ называется

1) ***мономорфизмом***, если равенство $\varphi\psi_1 = \varphi\psi_2$ (где ψ_1, ψ_2 — некоторые морфизмы) возможно лишь при $\psi_1 = \psi_2$;

2) ***эпиморфизмом***, если равенство $\psi_1\varphi = \psi_2\varphi$ возможно лишь при $\psi_1 = \psi_2$;

3) ***биморфизмом***, если φ — эпиморфизм и мономорфизм одновременно.

Разумеется, эпиморфизм в $\mathscr{C}$ — это мономорфизм в дуальной категории $\mathscr{C}^\circ$, и наоборот.

Упражнение 11. В категориях $\mathcal{S}et$, $\mathscr{L}in$ и $\mathscr{A}b$ мономорфизм — это то же самое, что инъективный морфизм, а эпиморфизм — то же самое, что сюръективный морфизм.

В категориях нормированных пространств дела обстоят по-другому:

Упражнение 12. Пусть $\mathscr{C}$ — какая-либо из категорий $\mathscr{N}orm$, $\mathscr{N}orm_1$, $\mathscr{B}an$, $\mathscr{B}an_1$, и пусть $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ — морфизм в $\mathscr{C}$. Докажите, что

1) T — мономорфизм $\iff$ T инъективен,
2) T — эпиморфизм $\iff$ его образ $\operatorname{Im} T$ плотен в Y.

Таким образом, в наших категориях мономорфизмы и эпиморфизмы — это не совсем то, что мы хотели бы называть «вложениями» и «наложениями»: инъективность — это еще не топологическая инъективность (см. замечание 1), а плотность образа — это еще не сюръективность и уж подавно не открытость.

Определение 4. Мономорфизм $\varphi\colon X \to Y$ в категории $\mathscr{C}$ называется *строгим мономорфизмом*, если из равенства $\varphi = \psi\chi$, где χ — биморфизм, следует, что χ — изоморфизм. Эпиморфизм φ в $\mathscr{C}$ называется *строгим эпиморфизмом*, если он является строгим мономорфизмом в $\mathscr{C}^\circ$ (дайте «прямое» определение!)

Упражнение 13. Докажите, что

1) φ — коретракция $\implies$ φ — строгий мономорфизм $\implies$ φ — мономорфизм,
2) φ — ретракция $\implies$ φ — строгий эпиморфизм $\implies$ φ — эпиморфизм.

Упражнение 14. 1) Докажите, что в категории $\mathscr{L}in$ импликации из упражнения 13 можно обратить.

2)* Какие из импликаций из упражнения 13 можно обратить в категории $\mathscr{A}b$?

Что же касается категорий нормированных пространств, то в них ни одна из импликаций, указанных в упражнении 13, не может быть обращена:

Упражнение 15. Пусть $\mathscr{C}$ — какая-либо из категорий $\mathscr{N}orm$ или $\mathscr{B}an$, и пусть $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ — морфизм в $\mathscr{C}$. Докажите, что

1) T — строгий мономорфизм $\iff$ T топологически инъективен и $\operatorname{Im} T$ замкнут,
2) T — строгий эпиморфизм $\iff$ T открыт.

Наконец, обсудим строгие моно- и эпиморфизмы в категориях $\mathscr{N}orm_1$ и $\mathscr{B}an_1$.

Определение 5. Линейный оператор $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ называется *коизометрическим*, если $T(B_1^\circ) = B_1^\circ$.

Упражнение 16. Придумайте пример коизометрического оператора, для которого $T(B_1) \neq B_1$.
Указание. Воспользуйтесь упражнением 4 из лекции 6.

Упражнение 17. Пусть $\mathscr{C}$ — какая-либо из категорий $\mathscr{N}orm_1$ или $\mathscr{B}an_1$, и пусть $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ — морфизм в $\mathscr{C}$. Докажите, что

1) T — строгий мономорфизм $\iff$ T изометричен и $\operatorname{Im} T$ замкнут,
2) T — строгий эпиморфизм $\iff$ T коизометричен.

Замечание 2. Напомним, что полнота — это инвариант изоморфизма в $\mathscr{N}orm$, и что полное подпространство нормированного пространства замкнуто (см. прошлую лекцию), Отсюда сразу следует, что топологически инъективный оператор между банаховыми пространствами имеет замкнутый образ. Поэтому для категорий $\mathscr{B}an$ и $\mathscr{B}an_1$ фразу «$\operatorname{Im} T$ замкнут» в упражнениях 15 (1) и 17 (1) можно опустить.

Теорема Банаха об обратном операторе.

Мы уже заметили, что топологически инъективный оператор между банаховыми пространствами обязан иметь замкнутый образ, а открытый оператор обязан быть сюръективным. Теорема Банаха утверждает, что верно и обратное. У этой теоремы (как и у многих других важных теорем) есть несколько эквивалентных формулировок. Вот одна из них.

Теорема 1 (об открытом отображении). *Пусть X и Y — банаховы пространства и $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ — сюръективный оператор. Тогда T открыт.*

Теорему об открытом отображении удобно доказывать в два этапа. На первом этапе будет использоваться полнота Y, а на втором — полнота X. Вначале введем одно вспомогательное понятие.

Определение 6. Оператор $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ между нормированными пространствами называется *почти открытым*, если $\overline{T(B_1^\circ)} \supset B_\varepsilon^\circ$ для некоторого $\varepsilon > 0$ (ср. упр. 3).

Предложение 1. *Пусть X — нормированное пространство, Y — банахово пространство и $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ — сюръективный оператор. Тогда T почти открыт.*

Доказательство. Сюръективность T означает, что $Y = \cup_n T(B_n^\circ)$. Поскольку Y полно, из теоремы Бэра получаем, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ множество $\overline{T(B_n^\circ)}$ имеет непустую внутренность. Следовательно, $\overline{T(B_n^\circ)} \supset T(x)+B_\varepsilon^\circ$ для некоторого $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Отсюда $\overline{T(B_n^\circ - x)} \supset B_\varepsilon^\circ$, и поэтому $\overline{T(B_N^\circ)} \supset B_\varepsilon^\circ$, как только $B_N^\circ \supset B_n^\circ - x$ (ясно, что при больших N это так). Остается поделить на N. $\square$

Предложение 2. *Пусть X — банахово пространство, Y — нормированное пространство и $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ — почти открытый оператор. Тогда T открыт.*

Доказательство. Заменяя, если надо, норму в X (или в Y) на эквивалентную, можем считать, что $\overline{T(B_1^\circ)} \supset B_1^\circ$. Тогда

$$\overline{T(B_r^\circ)} \supset B_r^\circ \quad \text{для любого} \quad r > 0. \tag{1}$$

Покажем, что $T(B_2^\circ) \supset B_1^\circ$. Возьмем любой $y \in B_1^\circ \subset Y$ и, пользуясь (1) при $r = 1$, подберем $x_1 \in B_1^\circ \subset X$ так, чтобы $\|y - Tx_1\| < 1/2$. Теперь применим (1) для $r = 1/2$ и подберем $x_2 \in B_{1/2}^\circ$ так, чтобы $\|y - Tx_1 - Tx_2\| < 1/4$. Продолжая в том же духе, получим последовательность $\{x_n\} \subset X$, для которой

$$x_n \in B_{1/2^{n-1}}^\circ \quad \text{и} \quad \|y - Tx_1 - \ldots - Tx_n\| < 1/2^n. \tag{2}$$

Поскольку X полно, первое из условий (2) позволяет утверждать, что существует элемент $x = \sum_{n=1}^\infty x_n \in X$. Используя второе из условий (2), видим, что $Tx = y$. Наконец, $\|x\| \leqslant \sum_n \|x_n\| < \sum_n 1/2^{n-1} = 2$, так что $x \in B_2^\circ$. Тем самым мы показали, что $T(B_2^\circ) \supset B_1^\circ$, как и требовалось. $\square$

Теперь, чтобы доказать теорему об открытом отображении, достаточно объединить предложения 1 и 2.

Вот два очевидных следствия этой теоремы[1]:

[1] Чуть позже мы увидим, что они на самом деле эквивалентны этой теореме.

Теорема 2 (об обратном операторе). *Пусть X и Y — банаховы пространства и $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ — биективный оператор. Тогда T — изоморфизм в $\mathscr{B}an$.*

Теорема 3 (о замкнутом образе). *Пусть X и Y — банаховы пространства и $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ — инъективный оператор с замкнутым образом. Тогда T топологически инъективен.*

Напомним, что *графиком* произвольного отображения $f\colon X \to Y$ называется множество $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$. Если X и Y — векторные пространства, а f линейно, то Γ_f — линейное подпространство в $X \oplus Y$.

Теорема 4 (о замкнутом графике). *Пусть X и Y — банаховы пространства и $T\colon X \to Y$ — линейный оператор. Тогда T непрерывен $\iff$ его график замкнут в $X \oplus Y$.*

Упражнение 18. Выведите теорему о замкнутом графике из теоремы об обратном операторе.

Упражнение 19. Докажите, что предположения о полноте X и Y в формулировке теоремы об обратном операторе опустить нельзя. А именно, приведите пример нормированных пространств X и Y и биективного оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, который не является изоморфизмом в $\mathscr{N}orm$, причем:

1) X полно, а Y — нет;
2)* Y полно, а X — нет[1].

Теперь можно усилить результат упражнения 10:

Упражнение 20. Докажите, что оператор $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ топологически инъективен $\iff$ T^* открыт (или, что то же самое, сюръективен — см. теорему 1).

Факторпространства.

Пусть X — векторное пространство, а X_0 — векторное подпространство в X. Из курса алгебры Вы знаете, что такое *факторпространство* X/X_0: его элементы — это аффинные подпространства вида $x + X_0$ (где x пробегает X), а структура векторного пространства на X/X_0 однозначно определяется тем требованием, чтобы факторотображение $q\colon X \to X/X_0$, переводящее каждый x в $x + X_0$, было линейным.

Пусть теперь X — нормированное пространство. Если мы хотим задать норму на X/X_0, то естественно потребовать, чтобы q стало после этого морфизмом нашей категории $\mathscr{N}orm$, т.е. чтобы оно было ограничено.

Упражнение 21. Докажите, что если на X/X_0 существует норма, такая, что факторотображение $q\colon X \to X/X_0$ ограничено, то X_0 замкнуто.

[1]В отличие от п. 1) этой задачи (где Вам удастся найти «классический» пример). в п. 2), повидимому, не обойтись без какого-нибудь «неконструктивного» рассуждения, так или иначе опирающегося на лемму Цорна.

На самом деле верно и обратное. В случае замкнутого X_0 существует, как правило, много неэквивалентных способов задать норму на X/X_0, для которой q ограничено. Но среди таких норм есть одна «самая лучшая» («универсальная»). А именно, для $\hat{x} \in X/X_0$ положим по определению

$$\|\hat{x}\| = \inf\{\|x\|\,;\, x \in q^{-1}(\hat{x})\}, \tag{3}$$

или, эквивалентно, для $x \in X$ положим

$$\|x + X_0\| = \inf\{\|x + y\|\,;\, y \in X_0\} = \rho(x, X_0)$$

Упражнение 22. 1) Докажите, что формула (3) задает преднорму на X/X_0;

2) Докажите, что эта преднорма является нормой $\iff$ X_0 замкнуто.

Начиная с этого момента, будем считать, что X_0 замкнуто, и что X/X_0 снабжено нормой по формуле (3).

Упражнение 23. 1) Докажите, что q коизометрично (а, следовательно, непрерывно, открыто, сюръективно, и имеет норму 1).

2) Из открытости и сюръективности q выведите, что топология на X/X_0, определяемая нормой (3) — это *фактортопология*, т.е. самая сильная топология, в которой q непрерывно. Иначе говоря, множество $U \subset X/X_0$ открыто $\iff$ $q^{-1}(U)$ открыто.

Упражнение 24. Докажите, что если X полно, то и X/X_0 полно.

Следующее свойство факторпространства, по сути, полностью его характеризует (и объясняет, почему норма на X/X_0 вводится именно так, а не иначе).

Упражнение 25. 1) Докажите, что для любого нормированного пространства Y и любого $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, такого, что $T|_{X_0} = 0$, существует единственный $\widehat{T} \in \mathscr{B}(X/X_0, Y)$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "q"'] & Y \\ X/X_0 \arrow[ur, dashed, "\widehat{T}"'] & \end{tikzcd}$$

При этом $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

2) Кроме того, $\widehat{T}$ открыт $\iff$ T открыт, и $\widehat{T}$ коизометричен $\iff$ T коизометричен.

Упражнение 26. Используя предыдущие упражнения, выведите теорему об открытом отображении из теоремы об обратном операторе.

Вот еще одна эквивалентная формулировка упражнения 25:

Упражнение 27. Докажите, что для любого нормированного пространства Y отображение

$$\mathscr{B}(X/X_0, Y) \to \big\{T \in \mathscr{B}(X, Y)\,;\, T|_{X_0} = 0\big\} \subset \mathscr{B}(X, Y), \quad S \mapsto S \circ q$$

является изоморфизмом в $\mathscr{N}orm_1$.

Замечание 3. Отсюда уже рукой подать до общего теоретико-категорного понятия *коядра*, но у нас с Вами, к сожалению, нет на это времени. О ядрах и коядрах можете почитать в книжке Букура и Деляну «Введение в теорию категорий и функторов». Все же мы сейчас дадим одну категорную интерпретацию понятия факторпространства.

Определение 7. Объект X категории $\mathscr{C}$ называется *инициальным* (соответственно, *финальным*), если для любого $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ множество $\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ (соответственно, $\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(Y, X)$) состоит из одного элемента. Объект называется *нулевым*, если он инициальный и финальный одновременно.

Ясно, что инициальный объект в $\mathscr{C}$ — это финальный объект в $\mathscr{C}^\circ$, и наоборот.

Упражнение 28. Докажите, что любые два инициальных (или финальных) объекта в $\mathscr{C}$ изоморфны.

Пример 1. В категориях $\mathscr{L}in$, $\mathscr{A}b$, $\mathscr{N}orm$, $\mathscr{B}an$, $\mathscr{N}orm_1$, $\mathscr{B}an_1$ нулевой объект — это нулевое пространство (для $\mathscr{A}b$ — нулевая группа).

Пример 2. В категориях $\mathcal{S}et$ и $\mathscr{T}op$ инициальный объект — пустое множество, финальный объект — одноэлементное множество, а нулевого объекта нет (почему?)

Пример 3. В категориях $_*\mathcal{S}et$ и $_*\mathscr{T}op$ множеств (пространств) в отмеченной точкой нулевой объект — одноэлементное множество.

Упражнение 29. Пусть X — нормированное пространство, а X_0 — его замкнутое подпространство. Дайте интерпретацию факторпространства X/X_0 (с учетом нормы на нем!) как инициального объекта некоторой категории.

Где об этом почитать. Теорема Банаха об открытом отображении — одно из основных утверждений функционального анализа, и она есть (в той или иной формулировке) в любом учебнике. О дополняемых подпространствах можно почитать в книге Рудина «Функциональный анализ» или в упоминавшихся ранее электронных лекциях N. Carothers'a. О факторпространствах нормированных пространств написано у Рида и Саймона («Методы современной математической физики, т.I: функциональный анализ») или у того же Carothers'a. О мономорфизмах и эпиморфизмах (обычных и строгих) см. книгу Цаленко и Шульгейфера «Основы теории категорий».