Лекция 8.
Двойственность в банаховых пространствах.

Сегодня мы поговорим о разных красивых взаимосвязях между операторами и их сопряженными. Для определенности давайте условимся до поры до времени рассматривать только банаховы пространства. Хотя кое-что из того, о чем пойдет речь, будет верно и для неполных нормированных пространств.

Вначале напомним один важный факт, который обсуждался на прошлой лекции: *Для любого банахова пространства X, его замкнутого подпространства X_0 и любого банахова пространства Y отображение*

$$\mathscr{B}(X/X_0, Y) \to \bigl\{T \in \mathscr{B}(X,Y)\,;\, T|_{X_0} = 0\bigr\} \subset \mathscr{B}(X,Y), \quad S \mapsto S \circ q \tag{1}$$

является изоморфизмом в $\mathscr{B}an_1$.

Замечание 1. На отображение (1) полезно также смотреть как на изоморфизм функторов от переменной Y, действующих из $\mathscr{B}an_1$ в $\mathscr{B}an_1$.

При $Y = \mathbb{C}$ отображение (1) превращается в q^*. Поэтому получаем следующее:

Предложение 1. *Если X_0 — замкнутое подпространство в X, то $q^*\colon (X/X_0)^* \to X^*$ — изометрическое вложение на подпространство $\{f \in X^*\,;\, f|_{X_0} = 0\}$.*

Упражнение 1. 1) Докажите, что если $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ открыт, то T^* топологически инъективен.

2) Докажите, что если $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ коизометричен, то T^* изометричен.

Замечание 2. Последнее упражнение полезно сравнить с упражнением 20 с прошлой лекции. Кстати, верно и обратное: если T^* топологически инъективен (соответственно, изометричен), то T открыт (соответственно, коизометричен). Доказать это, правда, уже не так легко (для этого нужно пользоваться геометрической формой теоремы Хана-Банаха, которую мы не обсуждали).

Из предложения 1 следует, что $(X/X_0)^*$ изометрически изоморфно подпространству в X^*, состоящему из функционалов, обнуляющихся на X_0. У этого подпространства есть специальное название.

Определение 1. Пусть $M \subset X$ — подмножество. Его *аннулятором* называется множество $M^\perp = \{f \in X^*\,;\, f|_M = 0\} \subset X^*$.

Определение 2. Пусть $N \subset X^*$ — подмножество. Его *преданнулятором* называется множество ${}^\perp N = \{x \in X\,;\, f(x) = 0\ \forall f \in N\} \subset X$.

Вот простейшие свойства аннуляторов и преданнуляторов (всюду далее M — подмножество в X, а N — в X^*):

При составлении конспекта существенно использованы неопубликованные записки лекций А. Я. Хелемского «Лекции и упражнения по функциональному анализу» (с согласия автора).

Упражнение 2. 1) $M^\perp$ и ${}^\perp N$ — замкнутые линейные подпространства в X^* и в X соответственно.

2) $\{0\}^\perp = X^*$; $X^\perp = \{0\}$; ${}^\perp\{0\} = X$; ${}^\perp X^* = \{0\}$.

3) $M_1 \subset M_2 \subset X \implies M_2^\perp \subset M_1^\perp \subset X^*$; $N_1 \subset N_2 \subset X^* \implies {}^\perp N_2 \subset {}^\perp N_1 \subset X$.

4) ${}^\perp(M^\perp) \supset M$; $({}^\perp N)^\perp \supset N$.

Если объединить 1) и 4), то получится, что для линейных подпространств $X_0 \subset X$ и $Y_0 \subset X^*$ имеют место включения $\overline{X_0} \subset {}^\perp(X_0^\perp)$ и $\overline{Y_0} \subset ({}^\perp Y_0)^\perp$. Одно из этих включений — всегда равенство:

Упражнение 3. Если $X_0 \subset X$ — линейное подпространство, то $\overline{X_0} = {}^\perp(X_0^\perp)$.

А другое — не обязательно:

Упражнение 4. Пусть Z — нерефлексивное банахово пространство. Положим $X = Z^*$, а в качестве замкнутого подпространства $Y_0 \subset X^*$ возьмем канонический образ Z в $Z^{**} = X^*$. Покажите, что $({}^\perp Y_0)^\perp = Z^{**}$. Как следствие, $({}^\perp Y_0)^\perp \neq Y_0$.

В частности, если рассматривать ℓ^∞ как сопряженное к ℓ^1, то для замкнутого подпространства $c_0 \subset \ell^\infty$ имеем $({}^\perp c_0)^\perp = \ell^\infty \neq c_0$.

Впрочем, нерефлексивность — единственная причина такого «несимметричного» поведения аннуляторов и преданнуляторов:

Упражнение 5. Если $Y_0 \subset X^*$ — линейное подпространство, и X рефлексивно, то $\overline{Y_0} = ({}^\perp Y_0)^\perp$.

Используя введенные обозначения, нетрудно описать сопряженные к факторпространствам и к подпространствам:

Упражнение 6. Докажите, что для любого замкнутого линейного подпространства $X_0 \subset X$ имеют место изометрические изоморфизмы $(X/X_0)^* \cong X_0^\perp$ и $X_0^* \cong X^*/X_0^\perp$.

Упражнение 7. Пусть $T \in \mathscr{B}(X, Y)$. Докажите, что

1) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$;

2) $\overline{\operatorname{Im} T} = {}^\perp(\operatorname{Ker} T^*)$;

3) $\operatorname{Ker} T = {}^\perp(\operatorname{Im} T^*)$;

4) $\overline{\operatorname{Im} T^*} \subset (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Упражнение 8. Приведите пример, показывающий, что в п. 4) предыдущего упражнения равенства может и не быть.

Предложение 2. *Пусть $T \in \mathscr{B}(X, Y)$. Тогда $\operatorname{Im} T$ замкнут $\iff$ $\operatorname{Im} T^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.*

Доказательство. Рассмотрим две коммутативные диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "q"'] & Y \\
X/\operatorname{Ker} T \arrow[ur, "\widehat{T}"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
X^* & Y^* \arrow[l, "T^*"'] \arrow[dl, "\widehat{T}^*"] \\
(X/\operatorname{Ker} T)^* \arrow[u, "q^*"]
\end{tikzcd}
$$

($\Longrightarrow$). Ясно, что $\widehat{T}$ инъективен. Кроме того, $\operatorname{Im}\widehat{T} = \operatorname{Im} T$, поэтому $\operatorname{Im}\widehat{T}$ замкнут. По теореме о замкнутом образе, $\widehat{T}$ топологически инъективен. Следовательно, $\widehat{T}^*$ сюръективен (упр. 20 с прошлой лекции). Поэтому из второй диаграммы видим, что $\operatorname{Im} T^* = \operatorname{Im} q^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp$ (см. предложение 1).

($\Longleftarrow$). Используя предложение 1 и вторую диаграмму, получаем цепочку равенств:

$$\operatorname{Im} q^* = (\operatorname{Ker} T)^\perp = \operatorname{Im} T^* = \operatorname{Im}(q^* \circ \widehat{T}^*)$$

Но q^* — инъекция, поэтому из равенства $\operatorname{Im} q^* = \operatorname{Im}(q^* \circ \widehat{T}^*)$ следует, что оператор $\widehat{T}^*$ сюръективен. Следовательно, $\widehat{T}$ топологически инъективен (см. упр. 1), поэтому $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im}\widehat{T}$ замкнут. $\square$

Банаховы комплексы.

Напомним (см. лекцию 1), что *цепным комплексом* линейных пространств называется бесконечная в обе стороны последовательность $X_\bullet = \{(X_n, d_n)\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$ линейных пространств и линейных отображений

$$\cdots \leftarrow X_{n-1} \xleftarrow{d_{n-1}} X_n \xleftarrow{d_n} X_{n+1} \leftarrow \cdots,$$

удовлетворяющих условию $d_{n-1} \circ d_n = 0$ для любого n. Иными словами, $\operatorname{Im} d_n \subset \operatorname{Ker} d_{n-1}$ для всех n.

Определение 3. Комплекс $X_\bullet$ называется *точным в члене* X_n, если $\operatorname{Im} d_n = \operatorname{Ker} d_{n-1}$. Комплекс называется (просто) *точным*, если он точен в каждом члене.

Если стрелки смотрят в направлении возрастания (а не убывания) индексов, получаем определение *коцепного комплекса*. Для коцепных комплексов понятие точности определяется точно так же (с точностью до очевидной замены обозначений).

Банахов комплекс (цепной или коцепной) — это комплекс, в котором все X_n — банаховы пространства, а все d_n — ограниченные операторы. Ясно, что если $X_\bullet$ — цепной банахов комплекс, то его сопряженный $X_\bullet^* = \{(X_n^*, d_n^*)\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$ — коцепной банахов комплекс.

Теорема 1. *Пусть $X_\bullet$ — банахов комплекс. Тогда $X_\bullet$ точен $\iff$ $X_\bullet^*$ точен.*

Для наглядности еще раз нарисуем наши комплексы:

$$\cdots \leftarrow X_{n-1} \xleftarrow{d_{n-1}} X_n \xleftarrow{d_n} X_{n+1} \xleftarrow{d_{n+1}} \cdots$$

$$\cdots \to X_{n-1}^* \xrightarrow{d_{n-1}^*} X_n^* \xrightarrow{d_n^*} X_{n+1}^* \xrightarrow{d_{n+1}^*} \cdots$$

Доказательство удобно разбить на три леммы.

Лемма 1. *Если $X_\bullet$ точен в X_n и X_{n-1}, то $X_\bullet^*$ точен в X_n^*.*

Доказательство. Из точности $X_\bullet$ в члене X_{n-1} следует, что $\operatorname{Im} d_{n-1}$ замкнут. Поэтому, используя предложение 2 и упражнение 7, получаем цепочку равенств:

$$\operatorname{Ker} d_n^* = (\operatorname{Im} d_n)^\perp = (\operatorname{Ker} d_{n-1})^\perp = \operatorname{Im} d_{n-1}^*.$$

$\square$

Лемма 2. *Если $X^*_\bullet$ точен в X^*_n, то* $\overline{\operatorname{Im} d_n} = \operatorname{Ker} d_{n-1}$.

Доказательство. Используя упражнение 7, получаем цепочку равенств:

$$\overline{\operatorname{Im} d_n} = {}^\perp(\operatorname{Ker} d_n^*) = {}^\perp(\operatorname{Im} d_{n-1}^*) = \operatorname{Ker} d_{n-1}.$$

□

Лемма 3. *Если $X^*_\bullet$ точен в X^*_{n+1}, то $\operatorname{Im} d_n$ замкнут.*

Доказательство. Из упражнений 7 и 2 следует, что

$$\operatorname{Ker} d_{n+1}^* = \operatorname{Im} d_n^* \subset (\operatorname{Ker} d_n)^\perp \subset (\operatorname{Im} d_{n+1})^\perp = \operatorname{Ker} d_{n+1}^*.$$

Следовательно, все включения в этой цепочке — равенства. В частности, $\operatorname{Im} d_n^* = (\operatorname{Ker} d_n)^\perp$, поэтому $\operatorname{Im} d_n$ замкнут по предложению 2. □

Доказательство теоремы 1 получается объединением трех последних лемм.

Пополнение.

Итак, мы уже убедились, что с банаховыми пространствами работать удобнее, чем с неполными нормированными. Если же пространство неполно, то его можно пополнить, т.е. вложить в качестве всюду плотного подпространства в некоторое полное пространство. Прежде чем говорить об этой конструкции, докажем одно несложное, но весьма полезное утверждение.

Теорема 2 (о продолжении по непрерывности). *Пусть X — нормированное пространство, $X_0 \subset X$ — всюду плотное линейное подпространство, Y — банахово пространство. Тогда для любого $T \in \mathscr{B}(X_0, Y)$ существует единственный $\overline{T} \in \mathscr{B}(X, Y)$, продолжающий T. При этом $\|\overline{T}\| = \|T\|$. Если T топологически инъективен или изометричен, то таков же и $\overline{T}$.*

Доказательство. Единственность $\overline{T}$ очевидна ввиду плотности X_0 в X. Существование доказывается «в лоб» первым приходящим в голову способом. А именно, возьмем произвольный $x \in X$ и подберем последовательность $\{x_n\} \subset X_0$, сходящуюся к x. Ясно, что она фундаментальна, поэтому такова же и $\{Tx_n\} \subset Y$. Но Y полно, поэтому существует $\lim_n Tx_n = y$. Этот предел не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x: если $\{x'_n\}$ — другая такая последовательность, то $x'_n - x_n \to 0$ и $Tx'_n - Tx_n \to 0$, так что $\lim_n Tx'_n = \lim_n Tx_n = y$. Поэтому, полагая $\overline{T}x = y$, мы получаем корректно определенное отображение из X в Y. Из линейности и непрерывности T легко следует линейность $\overline{T}$. Далее, если $\|Tx\| \leqslant C\|x\|$ или же $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$ для всех $x \in X_0$ (где $c, C > 0$ — некоторые константы), то те же оценки справедливы и для $\overline{T}$ и для всех $x \in X$. Отсюда следуют оставшиеся утверждения. □

Упражнение 9. Убедитесь в том, что для неполного Y теорема неверна.

Упражнение 10. Докажите, что линейное подпространство нормированного пространства либо всюду плотно, либо нигде не плотно. (По этой причине, говоря о всюду плотных линейных подпространствах, слово «всюду» часто опускают).

Пусть теперь X — фиксированное нормированное пространство. Понятие пополнения (как и многие другие важные математические понятия) имеет несколько эквивалентных определений. В одних ситуациях удобнее пользоваться одним, в других — другим.

Определение 4. *Пополнение* пространства X — это пара $(\widetilde{X}, j)$, где $\widetilde{X}$ — банахово пространство, а $j \in \mathscr{B}(X, \widetilde{X})$ — изометричное вложение с плотным образом.

Замечание 3. Из этого определения видно, что пополнение полного пространства X — это оно само (точнее, пара $(X, \mathbf{1}_X)$).

Определение 5. *Пополнение* пространства X — это пара $(\widetilde{X}, j)$, где $\widetilde{X}$ — банахово пространство, а $j \in \mathscr{B}(X, \widetilde{X})$ — сжатие (т.е. ограниченный линейный оператор нормы $\leqslant 1$). При этом требуется, чтобы для каждого банахова Y и каждого сжатия $\varphi \in \mathscr{B}(X, Y)$ существовало единственное сжатие $\widetilde{\varphi} \in \mathscr{B}(\widetilde{X}, Y)$, делающее следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, dashed, "\widetilde{\varphi}"] & Y \\ X \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Прежде чем доказывать эквивалентность этих определений, заметим, что определение 5 эквивалентно следующему:

Определение 6. *Пополнение* пространства $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{N}orm_1)$ — это пара $(\widetilde{X}, j)$, где $\widetilde{X} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{B}an_1)$ и $j \in \mathbf{h}_{\mathscr{N}orm_1}(X, \widetilde{X})$. При этом требуется, чтобы для каждого $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{B}an_1)$ отображение

$$\mathbf{h}_{\mathscr{B}an_1}(\widetilde{X}, Y) \to \mathbf{h}_{\mathscr{N}orm_1}(X, Y), \quad \psi \mapsto \psi \circ j \tag{2}$$

было биекцией.

Предложение 3. *Определения 4 и 5 эквивалентны.*

Доказательство. Если $(\widetilde{X}, j)$ — пополнение X в смысле определения 4, то оно удовлетворяет определению 5 в силу теоремы о продолжении по непрерывности.

Обратно, предположим, что $(\widetilde{X}, j)$ — пополнение X в смысле определения 5 (или эквивалентного ему определения 6). Мы должны проверить, что j изометрично и имеет плотный образ. Подставляя $Y = \mathbb{C}$ в (2), мы видим, что $j^*|_{B_1} \colon B_1(\widetilde{X}^*) \to B_1(X^*)$ — биекция между единичными шарами сопряженных пространств. Отсюда следует, что j^* — изоморфизм в $\mathscr{B}an_1$. Следовательно, таков же и j^{**}. Но j — ограничение j^{**} на $X \subset X^{**}$, поэтому j — изометрия. Наконец, $\overline{\mathrm{Im}\, j} = {}^\perp(\mathrm{Ker}\, j^*) = {}^\perp\{0\} = \widetilde{X}$, т.е. j имеет плотный образ. □

Следующее утверждение — вариант теоремы о продолжении по непрерывности.

Теорема 3. *Пусть X — нормированное пространство, $(\widetilde{X}, j)$ — его пополнение. Тогда для любого банахова пространства Y и любого $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ существует единственный $\widetilde{T} \in \mathscr{B}(\widetilde{X}, Y)$, такой, что $\widetilde{T} \circ j = T$. При этом $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.*

Замечание 4. Последнюю теорему можно переформулировать и так: *для любого банахова пространства Y отображение*

$$\mathscr{B}(\widetilde{X}, Y) \to \mathscr{B}(X, Y), \quad S \mapsto S \circ j$$

является изоморфизмом в $\mathscr{B}an_1$ (ср. (2)).

Те, кто сделал упражнение 21 с лекции 6, наверное, уже почувствовали, что «запахло представимыми функторами». Так оно и есть. Рассмотрим забывающий функтор $\square\colon \mathscr{B}an_1 \to \mathscr{N}orm_1$, и возьмем его композицию с ковариантным функтором морфизмов $\mathbf{h}^X_{\mathscr{N}orm_1}$. Полученный функтор $\mathbf{h}^X_{\mathscr{N}orm_1} \circ \square$, очевидно, ковариантен и действует из $\mathscr{B}an_1$ в $\mathcal{S}et$.

Предложение 4. *Пополнение $\widetilde{X}$ пространства X является представляющим объектом для функтора $\mathbf{h}^X_{\mathscr{N}orm_1} \circ \square\colon \mathscr{B}an_1 \to \mathcal{S}et$.*

Доказательство. Легко проверяется, что семейство биекций (2), рассмотренных для всевозможных $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{B}an_1)$, доставляет изоморфизм функторов $\mathbf{h}^X_{\mathscr{N}orm_1} \circ \square \cong \mathbf{h}^{\widetilde{X}}_{\mathscr{B}an_1}$. $\square$

На самом деле, верно и обратное: объект, представляющий функтор $\mathbf{h}^X_{\mathscr{N}orm_1} \circ \square$, является пополнением X. Чтобы в этом убедиться, нужно доказать, что любой изоморфизм функторов $\mathbf{h}^X_{\mathscr{N}orm_1} \circ \square \cong \mathbf{h}^{\widetilde{X}}_{\mathscr{B}an_1}$ задается формулой (2) для некоторого (единственного) $j\colon X \to \widetilde{X}$. Последнее утверждение носит общий категорный характер, и проверять его удобно в более абстрактной ситуации.

Предложение 5. *Пусть $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ — категории, $G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ — ковариантный функтор и $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *Функтор $\mathbf{h}^X_{\mathscr{D}} \circ G = \mathbf{h}_{\mathscr{D}}(X, G(\,\cdot\,))\colon \mathscr{C} \to \mathcal{S}et$ представим;*

2) *Существует пара $(\widetilde{X}, j)$, где $\widetilde{X} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ и $j \in \mathbf{h}_{\mathscr{D}}(X, G(\widetilde{X}))$, такая, что для каждого $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ и каждого $\varphi \in \mathbf{h}_{\mathscr{D}}(X, G(Y))$ существует единственный $\widetilde{\varphi} \in \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(\widetilde{X}, Y)$, такой, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} G(\widetilde{X}) \arrow[r, "G(\widetilde{\varphi})"] & G(Y) \\ X \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. 2)$\Longrightarrow$1). Отображение $\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(\widetilde{X}, Y) \to \mathbf{h}_{\mathscr{D}}(X, G(Y))$, действующее по правилу $\psi \mapsto G(\psi) \circ j$, биективно по условию и задает, как нетрудно проверить (проверьте!), изоморфизм функторов от переменной Y (ср. предложение 4).

1)$\Longrightarrow$2). Пусть $\widetilde{X} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ — представляющий объект для функтора $\mathbf{h}^X_{\mathscr{D}} \circ G$, и пусть $\{\alpha_Y : \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(\widetilde{X}, Y) \to \mathbf{h}_{\mathscr{D}}(X, G(Y))\,;\, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})\}$ — изоморфизм функторов. Положим $j =$

$\alpha_{\widetilde{X}}(\mathbf{1}_{\widetilde{X}}) \in \mathbf{h}_{\mathscr{D}}(X, G(\widetilde{X}))$, и докажем, что $\alpha_Y(\psi) = G(\psi) \circ j$ для всех $\psi \colon \widetilde{X} \to Y$. Поскольку α — морфизм функторов, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(\widetilde{X}, Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] & \mathbf{h}_{\mathscr{D}}(X, G(Y)) \\ \mathbf{h}_{\mathscr{C}}(\widetilde{X}, \widetilde{X}) \arrow[u, "\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(\widetilde{X},\psi)"] \arrow[r, "\alpha_{\widetilde{X}}"] & \mathbf{h}_{\mathscr{D}}(X, G(\widetilde{X})) \arrow[u, "\mathbf{h}_{\mathscr{D}}(X,G(\psi))"'] \end{tikzcd}$$

Применяя ее к морфизму $\mathbf{1}_{\widetilde{X}}$, получаем:

$$\alpha_Y(\psi) = \alpha_Y(\psi \circ \mathbf{1}_{\widetilde{X}}) = \alpha_Y\big(\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(\widetilde{X}, \psi)(\mathbf{1}_{\widetilde{X}})\big) = \\ = \mathbf{h}_{\mathscr{D}}(X, G(\psi))(\alpha_{\widetilde{X}}(\mathbf{1}_{\widetilde{X}})) = \mathbf{h}_{\mathscr{D}}(X, G(\psi))(j) = G(\psi) \circ j$$

Итак, наш изоморфизм функторов действует по правилу $\psi \mapsto G(\psi) \circ j$ и задает биекцию $\mathbf{h}_{\mathscr{C}}(\widetilde{X}, Y)$ на $\mathbf{h}_{\mathscr{D}}(X, G(Y))$. Биективность этого отображения как раз и означает, что выполнено 2). $\square$

Замечание 5. Обратите внимание, что мы доказали немного больше: *любой* морфизм (не обязательно изоморфизм) из представимого функтора $\mathbf{h}_{\mathscr{C}}^{\widetilde{X}}$ в функтор $\mathbf{h}_{\mathscr{D}}^{X} \circ G$ имеет вид $\psi \mapsto G(\psi) \circ j$ для некоторого $j \colon X \to G(\widetilde{X})$. Точно так же доказывается и более общее утверждение:

> *множество морфизмов из представимого функтора $\mathbf{h}_{\mathscr{C}}^{\widetilde{X}}$ в любой ковариантный функтор $F \colon \mathscr{C} \to \mathscr{S}et$ находится в биективном соответствии с множеством $F(\widetilde{X})$.*

В частности, можно взять в качестве F другой представимый функтор — получится доказательство леммы Ионеды (см. вторую формулу из упражнения 19 с лекции 6).

Определение 7. Объект $\widetilde{X}$, удовлетворяющий условиям предложения 5, называется *свободным объектом над X по отношению к функтору G*.

Пример 1. Пусть $\mathscr{C} = \mathscr{B}an_1$, $\mathscr{D} = \mathscr{N}orm_1$ и $G = \square$ — забывающий функтор. Тогда объект, свободный над X по отношению к G — это пополнение X.

Упражнение 11. Дайте интерпретацию свободного объекта как инициального объекта в некоторой категории.

Упражнение 12. Докажите, что если $(\widetilde{X}, j)$ и $(\widehat{X}, k)$ — свободные объекты над X по отношению к G, то существует единственный изоморфизм $\varphi \colon \widetilde{X} \to \widehat{X}$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} G(\widetilde{X}) \arrow[rr, "G(\varphi)"] & & G(\widehat{X}) \\ & X \arrow[ul, "j"] \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

Замечание 6. Применяя это упражнение к ситуации с пополнениями (пример 1), получаем *теорему о единственности пополнения*: между любыми двумя пополнениями пространства X существует единственная изометрия, оставляющая точки из X на месте.

Итак, мы выяснили, что такое пополнение и какими хорошими свойствами оно обладает (см., например, теорему 3). Осталась «самая малость» — понять, почему пополнение существует.

Предложение 6. *Пусть X — нормированное пространство, $\mathscr{X}$ — банахово пространство и $i\colon X \to \mathscr{X}$ — изометрическое вложение. Положим $\widetilde{X} = \overline{\operatorname{Im} i}$. Тогда $(\widetilde{X}, i)$ — пополнение*[1] *X.*

Доказательство. Ясно, что $\widetilde{X}$ полно (почему?). Остается воспользоваться определением 4. □

Теорема 4. *Любое нормированное пространство обладает пополнением.*

Доказательство. Достаточно применить предыдущее предложение к каноническому вложению $i_X\colon X \to X^{**}$ во второе сопряженное, которое полно (см. лекцию 6). □

Упражнение 13. Опишите пополнения следующих пространств: $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$ (при всех $p \in [1, \infty]$), $(\ell^p, \|\cdot\|_q)$ (при $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$), $(C^n[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ (где $\|\cdot\|_\infty$ — равномерная норма).

Замечание 7. Обратите внимание, что в последнем упражнении отсутствует (неполное!) пространство $C[a,b]$, снабженное нормой $\|\cdot\|_p$ при $p < \infty$. Чтобы описать, как устроено его пополнение, нам надо будет поговорить об интеграле Лебега. Этим мы займемся на следующей лекции.

Где об этом почитать. О двойственности для банаховых пространств подробно написано в учебнике Рудина «Функциональный анализ». О банаховых комплексах и различных их приложениях можно почитать в книге Хелемского «Гомология в банаховых и топологических алгебрах». Теорема 1 (точнее, ее аналог для пространств Фреше) — один из важных инструментов в комплексной аналитической геометрии (см. статью Ж.-П. Серра в сборнике «Расслоенные пространства», где доказана лемма 1). О пополнениях (для произвольных метрических пространств) написано почти в любом учебнике — например, у Колмогорова и Фомина; там же дается более «классическая» конструкция пополнения (как множества классов эквивалентности фундаментальных последовательностей). О свободных объектах можно почитать в книге Цаленко и Шульгейфера «Основы теории категорий». Категорная интерпретация пополнения есть в книге Букура и Деляну «Введение в теорию категорий и функторов».

[1] Строго говоря, нужно здесь вместо i брать его «коограничение» $j = i|^{\widetilde{X}}$.